



第二届国际数学奥林匹克竞赛
布拉戈维申斯克-俄罗斯，2022年3月19日

1. (本题9分)

求函数 $f(x) = 2e^{2-x^2}(x^6 - 3x^4 + 5x^2 - 1) - 2e - 5$ ($x \in R$) 的零点个数。

2. (本题12分)

求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} (A^n - E) \right),$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (本题10分)

已知 $f(x) = \frac{a^{2x}}{a^{2x} + a}$, $a > 0$, $x \in R$. 求

$$f(0) + f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2}{2022}\right) + f\left(\frac{3}{2022}\right) + \cdots + f\left(\frac{2021}{2022}\right) + f\left(\frac{2022}{2022}\right)$$

的值。

4. (本题9分)

在复平面中画出方程 $z(1 + e^{-it})^2 = 1$ 所代表的曲线，其中 t 是实参数。

5. (本题9分)

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$.

6. (本题8分)

求下列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和。

7. (本题12分)

求 m 维三角锥

$T_m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq h\}$
的体积。

8. (本题12分)

求微分方程

$$(y')^3 + \frac{2y'}{x^2} = 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{6y}{x} + \frac{12y^2}{x^2} + \frac{8y^3}{x^3} + \frac{4y}{x^3}$$

的实值函数解。

9. (本题9分)

已知 $x^{50} \sin^4(3x)$ 是某个 n 阶常系数齐次线性常微分方程的解。求满足条件的方程的阶数 n 的最小值。

10. (本题10分)

A、B 两位选手对弈国际象棋。已知单局 A 获胜的概率为 0.6，为公平起见他们规定 A 先赢到 3 局算胜，B 先赢到两局算胜（不存在和局）。求两人在整个比赛获胜的概率各是多少。