

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Амурский государственный университет
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
Дальневосточный федеральный университет

На правах рукописи

Пак Николай Михайлович

**Математические модели и вычислительные алгоритмы для
оценки характеристик процедуры лазерной абляции**

Специальность 1.2.2 — «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Ковтанюк Андрей Егорович

Владивосток — 2024

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Моделирование радиационно-кондуктивного теплообмена . .	14
1.1 <i>PI</i> -приближение уравнение переноса излучения	14
1.2 Граничное условие для уравнения переноса излучения	18
1.3 Уравнение теплопроводности с учетом энергии поглощенного излучения	20
Глава 2. Начально-краевая задача сложного теплообмена	22
2.1 Модель внутривенной лазерной абляции без учета излучения черного тела	22
2.1.1 Постановка начально-краевой задачи для модели внутривенной лазерной абляции без учета излучения черного тела	22
2.1.2 Разрешимость начально-краевой задачи и единственность решения	22
2.1.3 Вычислительный эксперимент	28
2.2 Модель внутривенной лазерной абляции с учетом излучения черного тела	31
2.2.1 Постановка и формализация начально-краевой задачи для модели внутривенной лазерной абляции	31
2.2.2 Итерационный метод решения начально-краевой задачи . .	33
2.2.3 Единственность решения и сходимость итерационного процесса	36
2.2.4 Вычислительный эксперимент	38
Глава 3. Задача оптимального управления	40
3.1 Оптимальное управление с фазовыми ограничениями для модели внутривенной лазерной абляции без учета излучения черного тела .	40
3.1.1 Постановка задачи оптимального управления	40
3.1.2 Разрешимость задачи оптимального управления	43
3.1.3 Доказательство сходимости итерационного алгоритма . . .	45
3.1.4 Реализация итерационного алгоритма	47

	Стр.	
3.2	Оптимальное управление с фазовыми ограничениями для модели внутривенной лазерной абляции с учетом излучения черного тела	49
3.2.1	Постановка задачи	49
3.2.2	Разрешимость задачи оптимального управления	51
3.2.3	Доказательство сходимости итерационного алгоритма	53
3.2.4	Реализация итерационного алгоритма	55
Глава 4.	Комплекс программ моделирования процесса внутривенной лазерной абляции и вычислительные эксперименты	58
4.1	Описание, назначение и структура программного комплекса	58
4.2	Вычислительные эксперименты и анализ результатов расчета	64
4.2.1	Верификация модели ВВЛА	64
4.2.2	Сравнение моделей внутривенной лазерной абляции с учетом и без учета излучения черного тела	64
4.2.3	Внутривенная лазерная абляция на разных длинах волн	67
4.2.4	Влияние черноты наконечника на температурное поле	68
4.2.5	Влияние штрафного коэффициента на сходимость алгоритма решения задачи оптимального управления	70
Заключение	76
Список литературы	77
Приложение А.	Копии свидетельств об официальных регистрациях программ для ЭВМ и вид графического интерфейса программного комплекса	85

Введение

Лазерная абляция является перспективным, относительно малоинвазивным и безопасным способом лечения различных заболеваний. Подходы, основанные на использовании лазерной абляции, применяются в различных медицинских областях, включая офтальмологию, общую хирургию, нейрохиргию, оториноларингологию, стоматологию, челюстно-лицевую хирургию и ветеринарию. Наиболее распространенными медицинскими процедурами, в которых используется лазерная абляция являются: коррекция зрения [1], фотоомоложение (шлифовка кожи), подготовка полости рта, биопсия, а также удаление опухолей [2, 3]. Лазерную хирургию можно использовать для абляции (удаления) доброкачественных и злокачественных новообразований в различных органах. Основные применения лазерной абляции в настоящее время включают уменьшение или удаление доброкачественных узлов щитовидной железы, миомы, фиброаденомы груди, доброкачественной гиперплазии предстательной железы и злокачественных новообразований почки [4], печени [5], мягких тканей, груди, простаты, легких [6], головного мозга [7], головы и шеи.

Лазерная абляция также используется для лечения хронической венозной недостаточности, в частности варикозного расширения вен [8]. Варикозное расширение вен является распространенной проблемой, которую обычно лечат с помощью операции. В качестве альтернативы хирургическому вмешательству были разработаны минимально инвазивные методы в попытке снизить заболеваемость и сократить время восстановления. Радиочастотная абляция (РЧА) и внутривенная лазерная абляция (ВВЛА) оказались наиболее эффективными из этих методов [9, 10].

В работе [11] на основе различных исследований проводится сравнение лазерной и радиочастотной абляции по пяти критериям, включающим эффективность, побочные эффекты, серьезные осложнения, рецидив и качество жизни. ВВЛА, по данным многочисленных исследований, более эффективна, чем РЧА по некоторым критериям. Профили побочных эффектов варьировали в отношении послеоперационной боли и кровоподтеков, поскольку было замечено, что и то, и другое было значительно меньше при использовании РЧА. Было обнаружено, что серьезные осложнения были редкими в обоих случаях без существенной разницы в частоте. Скорость реканализации была выше при использовании РЧА с

неопределенностью значимости среди различных исследований. Качество жизни улучшилось после обеих процедур без существенной разницы между ними. Вероятную причину, по которой ВВЛА приводит к большей послеоперационной боли, чем РЧА, объясняют результаты экспериментов [12], согласно которым лазерная абляция характеризуется более высокой пиковой температурой, хотя и в течение короткого промежутка времени, тогда как у радиочастотной абляции более низкие, хотя и более продолжительные, максимальные температуры.

Поскольку большинство побочных эффектов при проведении ВВЛА незначительны, а серьезные осложнения редки, ВВЛА представляет собой безопасную и минимально инвазивную процедуру, обладающую высокой эффективностью в лечении варикозной болезни.

Механизм проведения ВВЛА следующий: лазерное оптоволокно вводится в поврежденную вену, далее оптоволокно вытягивается из вены, при этом по нему передается лазерное излучение. Торцевое оптоволокно, из которого выходит излучение, обычно покрыто карбонизированным слоем, который разделяет поступающую энергию, в результате чего одна ее часть поглощается карбонизированным слоем, что вызывает его нагрев, другая часть идет на излучение. Тепло от нагретого карбонизированного слоя передается в кровь посредством кондуктивного теплообмена. Теплообмен многократно усиливается за счет потока пузырьков, образующихся на разогретом торце оптоволокна. Излучение, поступающее в кровь и окружающую ткань, частично поглощается, что сопровождается выделением тепла. В итоге образованная и поступившая за счет различных механизмов тепловая энергия вызывает значительный нагрев вены, что приводит к ее облитерации (закрытию сосуда).

Оптимизация параметров излучения при проведении ВВЛА позволяет осуществить успешную облитерацию вены с минимальной частотой и тяжестью осложнений. Для этого оптимальное излучение, с одной стороны, должно обеспечивать достаточно высокую температуру внутри вены для осуществления облитерации, с другой стороны, сгенерированное температурное поле должно быть относительно безопасным для окружающей вену ткани. Основными параметрами, влияющими на эффективность и безопасность процедуры лазерной абляции, являются мощность лазера, длина волны лазерного излучения, скорость движения оптоволокна, соотношение долей мощности лазера, идущих на излучение и на нагрев наконечника (карбонизированного слоя) оптоволокна. Как правило, при проведении лазерной абляции используется лазер с длиной волны

от 810 до 1940 нм. Достаточно распространенными являются диапазоны скорости движения оптоволокна от 1 до 3 мм/с и мощности лазерного излучения от 10 до 15 Вт [13].

Математическое моделирование радиационных и тепловых процессов, возникающих при проведении ВВЛА, является весьма актуальным в контексте определения оптимальных параметров излучения, обеспечивающих заданное распределение температуры внутри вены и в перивенозной ткани.

Классической моделью, описывающей взаимодействие оптического излучения с биологической тканью, является система двух дифференциальных уравнений, включающая уравнение переноса излучения и уравнение теплопроводности [14—16]. Соответственно, расчет радиационных и температурных полей включает в себя нахождение решения уравнения переноса, вычисление по нему объемной плотности поглощенной энергии излучения и последующее нахождение решения уравнения теплопроводности, в которое поглощенная энергия излучения входит в качестве источников тепла.

Нередко при решении различных задач переноса излучения учитываются эффекты отражения и преломления на границах раздела сред с различными показателями преломления [17, 18], что достаточно хорошо моделируется методом Монте-Карло [18, 19]. Модели радиационно-кондуктивного теплопереноса, основанные на интегродифференциальном уравнении переноса и уравнении теплопроводности, с граничными условиями отражения-преломления, достаточно хорошо изучены в [20—23]. В [20] доказана однозначная разрешимость начально-краевой задачи в случае условий Френеля на границах полупрозрачных тел, разделенных вакуумом. Аналогичный результат для диффузного отражения и преломления излучения получен в [22]. Для стационарной модели радиационно-кондуктивного теплопереноса в работе [21] установлена однозначная разрешимость краевой задачи. Квазистатические модели радиационно-кондуктивного теплопереноса, рассмотренные в [20, 22], состоят из нестационарного уравнения кондуктивного теплопереноса и стационарного уравнения радиационного переноса. Подробный теоретический анализ краевых задач для стационарного уравнения переноса излучения с Френелем и диффузными граничными условиями представлен в работах [24, 25]. Также отметим, что теоретический анализ начально-краевых задач для нестационарного уравнения переноса излучения с условиями отражения и преломления, проведенный в [26, 27], является основой

для исследования полностью нестационарной сложной модели теплопереноса, включающей уравнение переноса излучения.

С целью упрощения модели уравнение переноса излучения иногда заменяется на его диффузионное приближение, которое также позволяет описывать эффекты отражения и преломления. В дополнении к этому диффузионная модель может учитывать тепловое излучение, индуцированное самой средой, что приводит к нелинейной модели сложного теплообмена [28, 29]. Обратим внимание на работы [23, 30] в которых строятся и исследуются диффузионные модели, учитывающие и излучение черного тела, и эффекты отражения-преломления на границах разрыва коэффициента преломления. В ряде работ диффузионное приближение используется для моделирования прохождения оптического излучения через биологическую ткань [16, 31–34], которое позволяет учитывать коллимированный характер излучения [35]. В работе [16] оценивается вклад внутреннего теплового излучения, а также эффектов отражения и преломления в профили температуры и поглощенной энергии излучения для кожного покрова, находящегося под воздействием солнечного излучения. Сравнение диффузионного приближения (*P1*-приближения) с другими методами аппроксимации уравнения переноса проводилось в [36, 37]. Обратным экстремальным задачам для диффузионной модели радиационно-кондуктивного теплообмена посвящено [29, 38–41]. В [29] рассмотрена задача оптимального граничного мультипликативного управления для стационарной модели радиационно-кондуктивного теплообмена. Основным результатом работы является доказательство аналога принципа «бэнг-бэнг», возникающего в теории управления для обыкновенных дифференциальных уравнений. В [39, 40] исследуется минимизация целевого функционала путем управления функцией, описывающей отражающие свойства границы. Это позволяет получить желаемое распределение температуры или интенсивности излучения в модельной области. В [**<empty citation>**] для оптимизации целевого функционала выбран коэффициент отражения на границе.

Процесс ВВЛА также хорошо описывается диффузионной моделью радиационно-кондуктивного теплообмена с движущимися источниками тепла и радиации.. Основными эффектами, которые обычно учитываются при моделировании ВВЛА, являются кондуктивный теплообмен, перенос излучения и его поглощение с выделением тепла, а также перенос тепла потоком пузырьков, образующихся на кончике оптоволокна. В частности, в работе [42] приведены результаты экспериментов, демонстрирующих влияние движущихся

пузырьков, образованных на наконечнике оптоволокна, на температурное поле. В работах [43—45] на основе оценки экспериментальных данных перенос тепла потоком пузырьков моделируется использованием кусочно-постоянного коэффициента теплопроводности, зависящего от температуры следующим образом: при достижении температуры в некоторой точке 95°C и более коэффициент теплопроводности увеличивается в 200 раз. Результаты численного моделирования ВВЛА для длин волн непрерывного излучения в диапазоне от 810 до 1470 *нм* и различных диаметров вен приведены в работах [43—45]. В них, в частности, оценка эффективности лазерной абляции осуществляется через анализ температурных профилей в точках наблюдения, находящихся в различных зонах вычислительной области (кровь, внутренняя и внешняя стенки вены, перивенозная ткань). Отметим, что в указанных работах усредненная интенсивность излучения вычисляется по явной формуле, описывающей радиационное поле точечного источника в неограниченной однородной среде. Отметим, что используемая в диссертационной работе диффузионная модель ВВЛА позволяет описывать как импульсное, так и непрерывное излучение.

В работе [13] отмечается важность численного моделирования при выборе оптимальной мощности лазерного излучения для различных длин волн лазерного излучения и различных диаметров вен. Авторы проводят сравнительный численный анализ эффективности ВВЛА в случае непрерывного и импульсного (с продолжительностью импульса от 1 до 3 *с*) излучения с длиной волны 810 и 980 *нм*. Отмечается эффективность обоих подходов. И хотя импульсное излучение обеспечивает несколько меньший нагрев ткани, его использование требует точного позиционирования волокна и большую продолжительность операции. В итоге авторы отмечают, что многие врачи предпочитают выполнять лазерную абляцию, используя непрерывный источник излучения. Сложности использования импульсного излучения при проведении ВВЛА, отмеченные в работе [13], можно избежать, если значительно уменьшить продолжительность импульса. В работе [46] проводится численный анализ эффективности ВВЛА при использовании импульсного излучения с длиной волны 1320 *нм*, при продолжительности импульса 1.2 *мс* и частоте импульсов 30-50 Гц. Проводится сравнение со случаем непрерывного излучения с длиной волны 980 *нм*. Отмечается, что при использовании импульсного излучения можно достичь тот же эффект, как и при непрерывном излучении, используя меньшую суммарную мощность. Сопоставляя результаты проведенного численного моделирования с опубликованными статистическими

данными, авторы отмечают, что оба подхода являются достаточно эффективными и имеют сходные побочные эффекты.

Отметим, что в работах [13, 43—46] при выборе оптимальных параметров излучения используется прямое многократное моделирование, осуществляющее по сути перебор различных вариантов с целью поиска некоего оптимального решения. Данный подход не является эффективным. К тому же остаются без ответа вопросы, связанные с существованием оптимального решения и обоснованием сходимости соответствующих вычислительных алгоритмов. Наиболее перспективным подходом к выбору оптимальных параметров излучения является рассмотрение задачи оптимизации для уравнений типа реакция-диффузия, описывающих процедуру лазерной абляции. Теоретический и численный анализ моделей реакции-диффузии, описывающих различные явления в физике, биологии и экологии, можно найти в [47—50].

В работе [34, 51] рассматривается подход, заключающийся в решении задачи оптимального управления для подбора параметров излучения с целью приблизить температурный профиль в определенной точке модельной области к заданному графику, характеристики которого (максимальная температура и продолжительность кипения) обеспечивают успешное проведение процедуры ВВЛА. В качестве управления процессом берутся мощности источника, идущие на излучение и нагрев наконечника оптоволокна.

В [52, 53] в модель добавляется фазовое ограничение в заданной подобласти, что позволяет смоделировать температурное поле относительно безопасное для окружающей вену ткани. Предложен алгоритм решения задачи оптимального управления, основанный на методе штрафа, доказана его сходимость. Проведены вычислительные эксперименты, показывающие хорошую сходимость алгоритма. Одним из этапов поиска оптимального управления является нахождение решения начально-краевой задачи для модели ВВЛА. Поэтому вопросы существования и единственности решения начально-краевой задачи и обоснование сходимости итерационного алгоритма нахождения решения являются весьма актуальными. В работах [54, 55] доказываются теоремы существования и единственности решения начально-краевой задачи и предлагается алгоритм нахождения ее решения. В [55—58] рассматривается начально-краевая задача для квазилинейных уравнений сложного теплообмена, моделирующих процесс ВВЛА с учетом внутреннего теплового излучения (излучения черного тела). Предложен алгоритм нахождения решения начально-краевой задачи. Задача

оптимального управления для модели ВВЛА с учетом внутреннего теплового излучения рассмотрена в [59] и с ограничением на температуру в заданной подобласти в [60].

Целью диссертационной работы является теоретический и численный анализ задач сложного теплообмена для внутривенной лазерной абляции на основе численных методов решения прямых и обратных задач.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить **задачи**:

1. Исследовать начально-краевые и обратные экстремальные задачи для моделей ВВЛА
2. Разработать алгоритм решения начально-краевых и обратных экстремальных задач для моделей ВВЛА.
3. Исследовать сходимость алгоритмов решения начально-краевых и обратных экстремальных задач для моделей ВВЛА.
4. Разработать программное обеспечение решения начально-краевых и обратных экстремальных задач для моделей ВВЛА.

Научная новизна:

1. Доказаны теорема существования и единственности решения начально-краевой задачи ВВЛА с учетом и без учета излучения черного тела.
2. Предложен вычислительный алгоритм решения начально-краевой задачи для модели ВВЛА и обоснована его сходимость.
3. Доказана разрешимость задачи оптимального управления ВВЛА для моделей ВВЛА с учетом и без учета излучения черного тела.
4. Разработаны вычислительные алгоритмы решения задач оптимального управления для моделей ВВЛА с учетом и без учета излучения черного тела..

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в развитии оптимизационного подхода исследования процесса ВВЛА, основанного на использовании численных методов. Разработанные в работе алгоритмы могут использоваться как для решения начально-краевых задач, так и для решения обратных экстремальных задач для моделей ВВЛА.

Результаты проведенного научного исследования могут быть полезны при реализации образовательных программ в рамках группы специальностей 1.1 Математика и механика и 1.2 Компьютерные науки и информатика..

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Существование и единственность решения начально-краевых задач для моделей ВВЛА.
2. Разработка и обоснование сходимости итерационного алгоритма решения начально-краевой задачи для модели ВВЛА с учетом излучения черного тела.
3. Существование решения задачи оптимального управления.
4. Разработка и обоснование сходимости вычислительных алгоритмов решения задач оптимального управления для моделей ВВЛА.
5. Разработанный комплекс программ для ЭВМ, используемый для подбора оптимальных характеристик процедуры ВВЛА.

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением строгих математических доказательств и верификацией построенных алгоритмов на задачах с известными решениями. Результаты, полученные в диссертационной работе, согласуются с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены на: Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, Владивосток, 15–30 апреля 2021 [61], Международной конференции Дни Дифракции, Санкт-Петербург, 31 мая – 4 июня 2021, Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, Владивосток, 15–30 апреля 2022 [62], Научно-практическая конференция на английском языке студентов и аспирантов по естественным наукам, Владивосток, 25–31 мая 2021 [63], Международной конференции Дни Дифракции, Санкт-Петербург, 30 мая – 3 июня 2022, I Международном семинаре «Вычислительные технологии и прикладная математика» (International Workshop on Computing Technologies and Applied Mathematics) 11–15 июля 2022, Международной конференции Дни Дифракции, Санкт-Петербург, 5 – 9 июня 2023, II Международном семинаре «Вычислительные технологии и прикладная математика» 12–16 июня 2023 [64], VI Международной научно-практической конференции «Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления», Хабаровск, 11–13 сентября 2023.

Личный вклад. Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором лично или в соавторстве, при его непосредственном участии. Выбор направлений исследований, постановка задач математического моделирования, разработка численных алгоритмов решения задач ВВЛА, анализ результатов

осуществлены совместно с научным руководителем. Реализация разработанных численных алгоритмы в виде комплекса программ ЭВМ, вычислительные эксперименты проведены автором самостоятельно.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 12 научных работах, из них 3 статей — в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России; 5 в изданиях, индексируемых международными базами научного цитирования Scopus и Web of Science; 3 публикаций — в сборниках материалов и тезисов конференций. Получено 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Связь работы с научными темами и программами. Результаты диссертационной работы частично поддержаны Минобрнауки РФ (проект № 12208240001-8 и соглашение № 075-02-2022-880).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 1 приложения. Полный объем диссертации составляет 90 страниц, 27 рисунков и 5 таблиц. Список литературы содержит 75 наименований.

Краткое содержание работы

В первой главе рассмотрена модель радиационно-кондуктивного теплообмена, описывающая перенос тепла и радиации в некоторой среде и учитывающая излучение черного тела в предположении «серой среды», то есть когда радиационные характеристики не зависят от длины волны. Модель представляет собой систему двух дифференциальных уравнений: интегродифференциального уравнения переноса излучения и уравнения теплопроводности. Строится диффузионное приближение для модели радиационно-кондуктивного теплообмена, а также для граничных условий. В итоговой реакционно-диффузионной системе функции источников и диффузионный коэффициент адаптированы для моделирования процесса ВВЛА.

Во второй главе исследована начально-краевая задача сложного теплообмена с одним нелинейным (диффузионным) членом, а также модель с учетом излучения черного тела. Доказана разрешимость и единственность решения начально-краевых задач. Разработан, обоснован и численно реализован итерационный алгоритм решения начально-краевой задачи для модели ВВЛА с учетом излучения черного тела.

В третьей главе исследованы обратные экстремальные задачи. Доказана разрешимость задачи оптимального управления. Разработаны итерационные ал-

горитмы поиска решения задачи оптимального управления для моделей ВВЛА, доказана их сходимость. Обсуждаются результаты работы алгоритма.

Четвертая глава посвящена описанию разработанного комплекса программ и анализу результатов вычислительных экспериментов

В приложении представлены копии свидетельств об официальных регистрациях программ и показан интерфейс программ .

Глава 1. Моделирование радиационно-кондуктивного теплообмена

1.1 $P1$ -приближение уравнение переноса излучения

Рассмотрим перенос теплового излучения в трехмерной выпуклой ограниченной области G с границей Γ . Процесс переноса излучения в случае так называемой «серой среды» (то есть когда радиационные характеристики среды не зависят от длины волны) может быть описан следующим интегро-дифференциальным уравнением [65]:

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nabla I(r, \omega) + \mu I(r, \omega) = \\ = \frac{\mu_s}{4\pi} \int_{\Omega} P(\omega, \omega') I(r, \omega') d\omega' + \mu_a \frac{\sigma n^2 T^4(r)}{\pi} + \frac{1}{4\pi} J_1(r, \omega), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $r = (x, y, z)$ – точка в области G , ω – направление излучения, описывается точкой на единичной сфере $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$, $I(r, \omega)$ – интенсивность излучения, $\mu = \mu_a + \mu_s$ – коэффициент полного взаимодействия, μ_a – коэффициент поглощения излучения (доля излучения, поглощенная веществом на единице длины пути), μ_s – коэффициент рассеяния (доля излучения, рассеянного веществом на единице длины пути), σ – постоянная Стефана – Больцмана, n – показатель преломления, $T(r)$ – абсолютная температура, $J_1(r)$ – функция внутренних источников излучения, $P(\omega, \omega')$ – фазовая функция рассеяния, определяет плотность вероятности того, что излучение, падающее в направлении ω' , будет рассеяно в направлении ω .

Слагаемые в уравнении переноса излучения имеют следующий смысл:

- $\omega \cdot \nabla I(r, \omega)$ описывает изменение интенсивности излучения в точке r в направлении ω и представляет собой производную интенсивности в направлении ω ;
- $\mu I(r, \omega)$ описывает уменьшение интенсивности излучения за счет поглощения и рассеяния;
- $\frac{\mu_s}{4\pi} \int_{\Omega} P(\omega, \omega') I(r, \omega') d\omega'$ – описывает вклад рассеянного излучения;
- $\frac{\sigma n^2 T^4(r)}{\pi}$ – вклад в интенсивность излучения за счет внутреннего теплового излучения (излучения черного тела) в предположении «серой среды»;

– $\frac{1}{4\pi} J_1(r, \omega)$ описывает вклад в интенсивность излучения за счет внутренних источников излучения.

Численное нахождение интенсивности излучения из интегро-дифференциального уравнения с пятью независимыми переменными (три пространственные координаты и две координаты направления) представляет собой довольно сложную задачу.

Использование метода сферических гармоник позволяет получить приближенное решение произвольно высокого порядка (т. е. точности) путем преобразования уравнения переноса в систему дифференциальных уравнений в частных производных. Диффузионное приближение (*PI*-приближение) – это приближение низшего порядка при разложении интенсивности излучения по сферическим гармоникам.

Для вывода *PI*-приближения уравнения переноса излучения используем следующее разложение:

$$I(r, \omega) \simeq \frac{1}{4\pi} \phi(r) + \frac{3}{4\pi} \omega \cdot \Phi(r), \quad (1.2)$$

что представляет собой аппроксимацию функции интенсивности излучения суммой первых двух членов ряда Фурье, содержащего присоединенные функции Лежандра, где $\Phi(r)$ – вектор-функция. Будем аппроксимировать фазовую функцию также двумя слагаемыми:

$$P(\omega, \omega') \simeq 1 + A\omega \cdot \omega'. \quad (1.3)$$

В уравнении (1.3) коэффициент $A \in [-1; 1]$ описывает анизотропию рассеяния. Случай $A = 0$ соответствует изотропному рассеянию. Подставляя (1.2) и (1.3) в уравнение переноса излучения (1.1) получаем

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nabla \left(\frac{1}{4\pi} \phi(r) + \frac{3}{4\pi} \omega \cdot \Phi(r) \right) + \mu \left(\frac{1}{4\pi} \phi(r) + \frac{3}{4\pi} \omega \cdot \Phi(r) \right) = \\ = \frac{\mu_s}{4\pi} \int_{\Omega} (1 + A\omega \cdot \omega') \left(\frac{1}{4\pi} \phi(r) + \frac{3}{4\pi} \omega' \cdot \Phi(r) \right) d\omega' + \\ + \mu_a \frac{\sigma n^2 T^4(r)}{\pi} + \frac{J_1(r)}{4\pi} + \delta(r, \omega). \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\delta(r, \omega)$ – некоторая невязка, образующаяся при подстановке приближений (1.2) и (1.3) в уравнение переноса (1.1).

Преобразуем интеграл в правой части (1.4)

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (1 + A\omega \cdot \omega') \left(\frac{1}{4\pi} \phi(r) + \frac{3}{4\pi} \omega' \cdot \Phi(r) \right) d\omega' = \\
 & = \frac{1}{4\pi} \phi(r) \int_{\Omega} d\omega' + \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \omega' \cdot \Phi(r) d\omega' + \frac{1}{4\pi} A\phi(r) \int_{\Omega} \omega \cdot \omega' d\omega' + \\
 & \quad + \frac{3}{4\pi} A \int_{\Omega} (\omega \cdot \omega') (\omega' \cdot \Phi(r)) d\omega' + \delta(r, \omega).
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Чтобы упростить (1.5), воспользуемся следующими равенствами.

$$\int_{\Omega} d\omega' = 4\pi, \tag{1.6}$$

$$\int_{\Omega} a \cdot \omega' d\omega' = a \cdot \int_{\Omega} \omega' d\omega' = 0 \tag{1.7}$$

где a – заданный вектор.

Для преобразования интеграла

$$\int_{\Omega} (\omega \cdot \omega') (\omega' \cdot \Phi(r)) d\omega'$$

воспользуемся представлением угловой переменной ω' через сферические координаты:

$$\omega' = \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

где θ – угол между вектором ω' и координатной осью Oz , ψ – угол между проекцией вектора ω' на координатную плоскость xOy и координатной осью Ox . В

результате

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\omega \cdot \omega') (\omega' \cdot \Phi(r)) d\omega' = \\
 & \omega \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos^2 \psi & \sin^2 \theta \sin \psi \cos \psi & \sin \theta \cos \theta \cos \psi \\ \sin^2 \theta \sin \psi \cos \psi & \sin^2 \theta \cos^2 \psi & \sin \theta \cos \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \theta \sin \psi & \cos^2 \theta \end{pmatrix} \sin \theta d\theta d\psi \cdot \Phi(r) \\
 & = \omega \cdot \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \pi \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & \pi \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \cos^2 \theta \end{pmatrix} \sin \theta d\theta \cdot \Phi(r) = \frac{4\pi}{3} \Phi(r) \cdot \omega,
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

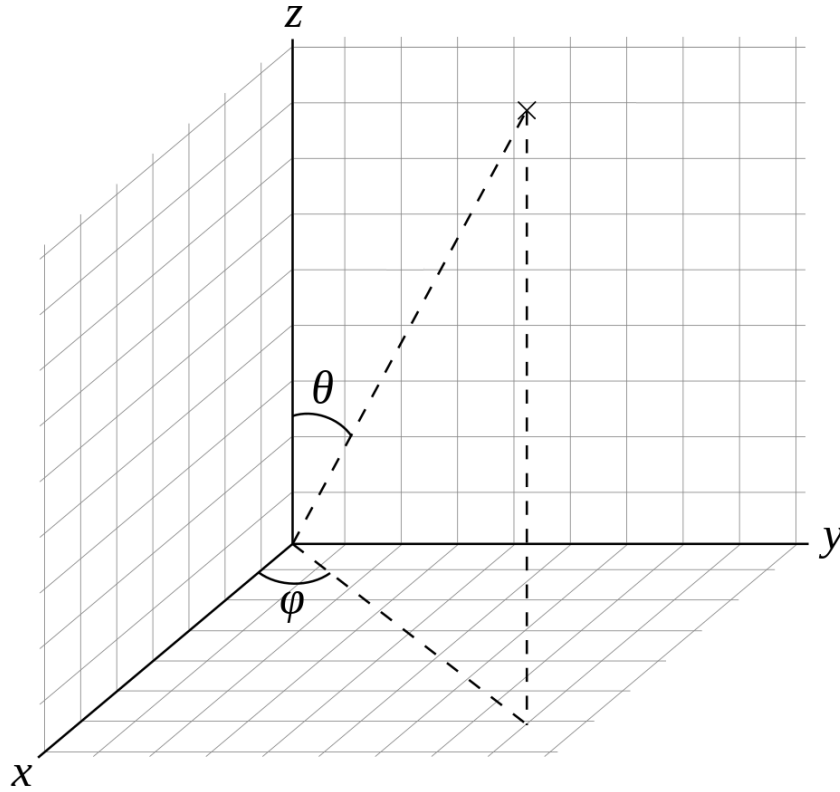


Рисунок 1.1 — Переход в сферические координаты

Подставляем (1.6) – (1.8) в уравнение (1.4), в результате получим

$$\begin{aligned}
 & \omega \cdot \nabla(\phi(r) + 3\omega \cdot \Phi(r)) + \mu(\phi(r) + 3\omega \cdot \Phi(r)) - \\
 & - \mu_s(\phi(r) - A\Phi(r) \cdot \omega) - \mu_a \kappa T^4(r) - J_1(r) = \delta(r, \omega),
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $\kappa = 4\sigma n^2$.

Разложение невязки $\delta(r, \omega)$ в ряд Фурье по присоединенным функциям Лежандра и требование обращения в нуль первых двух коэффициентов Фурье дают

два дифференциальных уравнения первого порядка. Для получения первого уравнения проинтегрируем левую часть равенства (1.9) по Ω и приравняем полученное выражение к нулю. С учетом равенств (1.6)–(1.8) в итоге получаем:

$$\nabla \cdot \Phi(r) + \mu_a \phi(r) = \mu_a \kappa T^4(r) + J_1(r). \quad (1.10)$$

Второе уравнение получается путем умножения левой части (1.9) на ω и интегрирования полученного выражения по Ω . С учетом равенств (1.6)–(1.8) в итоге получаем уравнение:

$$\frac{1}{3} \nabla \phi(r) + \mu \Phi(r) = \frac{1}{3} \mu_s A \Phi(r),$$

которое мы перепишем в следующем виде:

$$\Phi(r) = -\alpha \nabla \phi(r), \quad (1.11)$$

где $\alpha = (3\mu - A\mu_s)^{-1}$.

Из уравнений (1.10) и (1.11) получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla \phi(r)) + \mu_a \phi(r) = \mu_a \kappa T^4(r) + J_1(r). \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) представляет собой диффузионное (*PI*) приближение уравнения переноса излучения 1.1.

1.2 Граничное условие для уравнения переноса излучения

Если отражательная способность поверхности имеет как зеркальную, так и диффузную составляющие, то исходящее от поверхности излучение может быть описано следующим равенством:

$$I(r, \omega) = \varepsilon(r) I_b(r, \omega_R) + \rho^s(r) I(r, \omega_R) + \frac{\rho^d(r)}{\pi} \int_{\omega' \cdot \mathbf{n} > 0} I(r, \omega') \omega' \cdot \mathbf{n} d\omega', \quad (1.13)$$

$$\omega \cdot \mathbf{n} < 0, \quad r \in \Gamma.$$

здесь \mathbf{n} – вектор внешней нормали к границе Γ , $\varepsilon(r)$ – коэффициент, описывающий излучающие свойства поверхности, ρ^s и ρ^d – коэффициенты зеркального и диффузного отражения, $\varepsilon + \rho^s + \rho^d = 1$.

Чтобы построить граничное условие для диффузионного приближения уравнения переноса, подставим (1.2) в граничное условие (1.13)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \phi(r) + \frac{3}{4\pi} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Phi}(r) &= \varepsilon(r) \frac{\sigma n^2}{\pi} T_b^4(r) + \\ &+ \rho^s(r) \left(\frac{1}{4\pi} \phi(r) + \frac{3}{4\pi} \boldsymbol{\omega}_R \cdot \boldsymbol{\Phi}(r) \right) + \\ &+ \frac{\rho^d}{\pi} \int_{\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n} > 0} \left(\frac{1}{4\pi} \phi(r) + \frac{3}{4\pi} \boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\Phi}(r) \right) (\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega}', \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $\boldsymbol{\omega}_R = \boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ – представляет собой вектор зеркального отражения.

Умножим обе части (1.14) на $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ и проинтегрируем полученное равенство по множеству входящих в область Ω направлений. В результате получим

$$\begin{aligned} \phi(r) \int_{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega} + 3 \int_{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Phi}(r)) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega} &= \\ = 4\varepsilon(r) \sigma n^2 T_b^4(r) \int_{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega} + \rho^s(r) \phi(r) \int_{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} > 0} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega} + \\ + 3\rho^s(r) \int_{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0} (\boldsymbol{\omega}_R \cdot \boldsymbol{\Phi}(r)) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega} + \\ + \int_{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0} \left(\frac{\rho^d(r)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n} > 0} (\phi(r) + 3\boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\Phi}(r)) (\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega}' \right) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для нахождения значения $\int_{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} > 0} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega}$ перейдем в полярную систему координат. Пусть Oz сонаправлена с вектором \mathbf{n} , тогда $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = \cos \theta$.

$$\int_{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} > 0} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi = \pi \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = \pi \quad (1.16)$$

Аналогично $\int_{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega} = -\pi$.

Теперь вычислим значение интегралов $\int_{\omega \cdot \mathbf{n} > 0} (\omega \cdot a)(\omega \cdot b)d\omega$ и $\int_{\omega \cdot \mathbf{n} < 0} (\omega \cdot a)(\omega \cdot b)d\omega$. Так как подынтегральная функция четная, то

$$\int_{\omega \cdot \mathbf{n} > 0} (\omega \cdot a)(\omega \cdot b)d\omega = \int_{\omega \cdot \mathbf{n} < 0} (\omega \cdot a)(\omega \cdot b)d\omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\omega \cdot a)(\omega \cdot b)d\omega = \frac{2\pi}{3} a \cdot b \quad (1.17)$$

Применяя (1.16)–(1.17) в (1.15) получаем

$$\begin{aligned} -\pi\phi(r) + 2\pi\Phi(r) \cdot \mathbf{n} &= -4\pi\varepsilon(r)\sigma n^2 T_b^4(r) - \pi\rho^s(r)\phi(r) + \\ &- 2\pi\rho^s(r)\Phi(r) \cdot \mathbf{n} - \pi\rho^d(r)\phi(r) - 2\pi\rho^d(r)\Phi(r) \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Воспользуемся равенством (1.11). В результате

$$\begin{aligned} -\phi(r) - 2\alpha \frac{\partial\phi(r)}{\partial\mathbf{n}} &= -4\varepsilon(r)\sigma n^2 T_b^4(r) - \rho^s(r)\phi(r) + \\ &+ 2\rho^s(r)\alpha \frac{\partial\phi(r)}{\partial\mathbf{n}} - \rho^d(r)\phi(r) + 2\rho^d(r)\alpha \frac{\partial\phi(r)}{\partial\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Подставляя $\varepsilon + \rho^s + \rho^d = 1$, получим

$$\varepsilon\phi(r) - 2(\varepsilon - 2)\alpha \frac{\partial\phi(r)}{\partial\mathbf{n}} - 4\varepsilon\sigma n^2 T_b^4(r) = 0$$

или

$$\alpha \frac{\partial\phi(r)}{\partial\mathbf{n}} + \gamma\phi(r) = \gamma\sigma n^2 T_b^4(r), \quad r \in \Gamma \quad (1.20)$$

где $\gamma = \frac{\varepsilon}{2(2 - \varepsilon)}$.

1.3 Уравнение теплопроводности с учетом энергии поглощенного излучения

Температурное поле с учетом энергии поглощенного излучения описывается следующим уравнением теплопроводности

$$\rho c_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T(r)) = -\nabla \cdot \int_{\Omega} \omega I(r, \omega) d\omega + J(r). \quad (1.21)$$

здесь k – коэффициент теплопроводности, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, ρ – плотность, $J(r)$ – объемная плотность источников тепла.

Подставим (1.2) в (1.21)

$$\rho c_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T(r)) = -\nabla \cdot \int_{\Omega} \omega \left(\frac{1}{4\pi} \phi(r) + \frac{3}{4\pi} \omega \cdot \Phi(r) \right) d\omega + J(r). \quad (1.22)$$

Воспользуемся свойствами (1.7)–(1.8), приходим к равенству

$$\rho c_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T(r)) = -\nabla \cdot \Phi(r) + J(r). \quad (1.23)$$

Далее, учитывая (1.10), получаем

$$\rho c_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T(r)) = \mu_a \phi(r) - \mu_a \kappa T^4(r) + J_2(r), \quad (1.24)$$

где $J_2 = J - J_1$.

Уравнение теплопроводности 1.24 дополняется начальным и граничным условиями

$$\begin{aligned} T(r, 0) &= T_0, \\ \frac{\partial T(r)}{\partial \mathbf{n}} + \lambda(T - T_b) &= 0, \quad r \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где λ – коэффициент теплопередачи.

Далее будем работать с нормализованной температурой и интенсивностью излучения [66]. Для их нормализации рассмотрим следующие представления

$$\phi = 4\sigma n^2 T_c \varphi, \quad T = T_c \theta.$$

и подставим их в уравнения (1.12), (1.24) и граничные условия (1.20), (1.25). Здесь T_c – некоторая характерная температура. В результате получим уравнения радиационно-кондуктивного теплообмена в нормализованном виде

$$a \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \theta) + b(\theta |\theta^3| - \varphi) = J_\theta, \quad (1.26)$$

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla \varphi) + \beta(\varphi - \theta |\theta^3|) = J_\varphi, \quad (1.27)$$

а также граничные и начальные условия

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} + \lambda(\theta - \theta_b) = 0, \quad r \in \Gamma,$$

$$\theta(r, 0) = \theta_0. \quad (1.29)$$

Здесь $a = \rho c_p$, $b = 4\sigma n^2 \mu_a T_c^3$, $J_\varphi = J_1 / (4\sigma n^2 T_c^4)$, $J_\theta = J_2 / T_c$, $\beta = \mu_a$, $\theta_b = T_b / T_c$, $\theta_0 = T_0 / T_c$. Для удобства проведения дальнейшего теоретического анализа уравнений 1.26 и 1.27 мы заменили в них θ^4 на $\theta |\theta^3|$.

Глава 2. Начально-краевая задача сложного теплообмена

2.1 Модель внутривенной лазерной абляции без учета излучения черного тела

2.1.1 Постановка начально-краевой задачи для модели внутривенной лазерной абляции без учета излучения черного тела

Рассмотрим случай радиационно-кондуктивного теплообмена в ограниченной трехмерной области G с границей $\Gamma = \partial G$ без учета излучения черного тела в интервале времени $(0, T)$. Модель (1.26)–(1.28) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} a \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \theta) &= \mu_a \varphi + u_1 \chi, \\ -\nabla \cdot (\alpha \nabla \varphi) + \mu_a \varphi &= u_2 \chi, \quad r \in G, \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha \partial_{\mathbf{n}} \varphi + 0.5 \varphi|_{\Gamma} &= 0, \\ k \partial_{\mathbf{n}} \theta + \lambda(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\theta(r, 0) = \theta_0. \quad (2.3)$$

Здесь θ – температура, $\varphi(r)$ – интенсивность излучения, α – коэффициент диффузии оптического излучения, a – произведение удельной теплоемкости на плотность среды, λ – коэффициент теплопередачи, u_1 описывает мощность источника, идущую на излучение, u_2 описывает мощность источника, идущую на нагрев наконечника оптоволоконка. Функции θ_0 , θ_b определяют граничное и начальное распределения температуры. Через $\partial_{\mathbf{n}}$ обозначим производную по направлению внешней нормали \mathbf{n} к границе Γ .

2.1.2 Разрешимость начально-краевой задачи и единственность решения

Будем предполагать, что G – липшицева ограниченная область, $\Gamma = \partial G$, $Q = G \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Обозначим через L^p , $1 \leq p \leq \infty$ пространство

Лебега, через H^1 пространство Соболева W_2^1 и через $L^p(0, T; X)$ пространство Лебега функций из L^p , определенных на $(0, T)$, со значениями в банаховом пространстве X . Пусть $H = L^2(G)$, $V = H^1(G)$, а пространство V' двойственно к V . Тогда мы отождествим H с его двойственным пространством H' таким, что $V \subset H = H' \subset V'$, и обозначим через $\|\cdot\|$ норму в H , а через (h, v) значение функционала $h \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $h \in H$.

Рассмотрим следующую подзадачу:

$$a \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \theta(r)) = f, \quad (2.4)$$

$$k \partial_n \theta + \lambda(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (2.5)$$

Будем считать, что исходные данные задачи удовлетворяют условиям:

- (i) $0 < a_0 \leq a \leq a_1$, $\frac{\partial a}{\partial t} \leq a_2$, $a_j = \text{Const}$.
- (ii) $0 < k_0 \leq k(s) \leq k_1$, $|k'(s)| \leq k_2$, $s \in \mathbb{R}$, $k_j = \text{Const}$.
- (iii) $f \in L^2(0, T, V')$, $\theta_b \in H$.
- (iv) $\lambda \in L^\infty(\Sigma)$

Определим оператор $A: V \rightarrow V'$ используя равенство, справедливое для любого $\theta, v \in V$:

$$(A(\theta), v) = (k(\theta) \nabla \theta, \nabla v) + \int_\Gamma \lambda \theta v d\Gamma = (\nabla h(\theta), \nabla v) + \int_\Gamma \lambda \theta v d\Gamma,$$

где

$$h(s) = \int_0^s k(r) dr.$$

Пусть $g \in L^\infty(0, T, V')$, $(g, v) = \int_\Gamma \lambda \theta_b v d\Gamma$.

В дальнейшем в качестве скалярного произведения в V будем использовать билинейную форму:

$$(u, v)_V = (\nabla u, \nabla v) + \int_\Gamma u v d\Gamma.$$

Соответствующая норма эквивалентна стандартной норме пространства V . Для задачи (2.4)–(2.5) справедлива следующая слабая формулировка:

Определение 1. Функция $\theta \in L^2(0, T; V)$ называется слабым решением задачи (2.4)–(2.5), если $a\theta' \in L^2(0, T; V')$ и

$$a\theta' + A(\theta) = \eta, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (2.6)$$

где $\theta' = \frac{\partial \theta}{\partial t}$, $\eta = f + g$.

Заметим, что $(a\theta)' = a\theta' + \theta \frac{\partial a}{\partial t} \in L^2(0, T; V')$. Тогда $a\theta \in L^2(0, T; V')$ и следовательно $a\theta \in C([0, T], V')$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (i)–(iii), тогда задача (2.4)–(2.5) разрешима.

Доказательство. Определим галеркинские приближения θ_m решения задачи (2.4)–(2.5) и получим априорные оценки, необходимые для доказательства разрешимости. В пространстве V рассмотрим ортонормированный в H базис $w_1, w_2, \dots, V_m = \text{span}\{w_1, \dots, w_m\}$. Пусть $\theta_m(t) \in V_m$, $t \in (0, T)$ – решение следующей задачи Коши:

$$(a\theta'_m + A(\theta_m) - \eta, \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in V_m, \quad \theta_m|_{t=0} = \theta_{0m}. \quad (2.7)$$

Здесь, θ_{0m} – ортогональная проекция в H функции θ_0 на подпространство V_m .

Выведем априорные оценки, необходимые для доказательства разрешимости. Положим $\zeta = \theta_m$ в (2.7) и проинтегрируем по времени от 0 до t . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\sqrt{a}\theta_m\|^2 + \int_0^t \left(k(\theta(s)) \nabla \theta_m(s), \nabla \theta_m(s) \right) + \int_{\Gamma} \lambda \theta_m^2 d\Gamma \Big) ds = \\ \frac{1}{2} \|\sqrt{a|_{t=0}}\theta_{0m}\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t (a_t \theta_m, \theta_m) ds + \int_0^t (\eta, \theta_m) ds. \end{aligned}$$

Пусть $\nu = \min\{k_0, \lambda_0\} > 0$. Т.к.

$$(\eta, \theta_m) \leq \frac{1}{2\nu} \|\eta\|_{V'}^2 + \frac{\nu}{2} \|\theta_m\|_V^2,$$

то с учетом условий (i), (ii), (iv) и определения нормы в V получаем неравенство

$$a_0 \|\theta_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\theta_m(s)\|_V^2 ds \leq K + a_2 \int_0^t \|\theta_m(s)\|^2 ds. \quad (2.8)$$

Здесь, $K = a_1 \|\theta_0\|^2 + \nu^{-1} \|\eta\|_{V'}^2$. По неравенству Гронуолла для $\|\theta_m(t)\|^2$, получаем оценку

$$\|\theta_m(t)\|^2 \leq \frac{K}{a_0} \exp\left(\frac{a_2 t}{a_0}\right) \text{ п.в. на } (0, T). \quad (2.9)$$

Полученное неравенство позволяет оценить правую часть в (2.8) и, следовательно,

$$\nu \int_0^T \|\theta_m(s)\|_V^2 ds \leq K \exp\left(\frac{a_2 T}{a_0}\right). \quad (2.10)$$

Таким образом,

$$\|\theta_m\|_{L^\infty(0, T; H)} \leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^2(0, T; V)} \leq C, \quad \|h(\theta_m)\|_{L^2(0, T; V)} \leq C. \quad (2.11)$$

Здесь и далее при доказательстве теоремы через C обозначаются константы, не зависящие от m . Полученные оценки (2.11) позволяют утверждать, что, переходя при необходимости к подпоследовательности, существует функция θ такая, что

$$\theta_m \rightarrow \theta \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \quad h(\theta_m) \rightarrow \chi \text{ слабо в } L^2(0, T; V). \quad (2.12)$$

Результаты сходимости (2.12) достаточны для предельного перехода при $m \rightarrow \infty$ в системе (2.7) и доказательства того, что предельная функция $\theta \in L^2(0, T; V)$ такова, что $a\theta' \in L^2(0, T; V')$, и выполняется равенство

$$(a\theta', v) + (\nabla \chi, \nabla v) + \int_{\Gamma} \lambda \theta v d\Gamma = (\eta, v), \quad \forall v \in V$$

и начальное условие. Чтобы доказать, что θ является слабым решением задачи (2.4)–(2.5), достаточно проверить, что выполняется равенство $\chi = h(\theta)$. Получим оценку, гарантирующую компактность последовательности θ_m в $L^2(Q)$. В системе (2.7) положим $\zeta = \theta_m(t) - \theta_m(s)$ и проинтегрируем по t на интервале $(s, s + \delta)$ и относительно s на $(0, T - \delta)$, предполагая, что $\delta > 0$ достаточно мало:

$$\frac{1}{2} \int_0^{T-\delta} \|\sqrt{a}(\theta_m(s + \delta) - \theta_m(s))\|^2 ds = \int_0^{T-\delta} \int_s^{s+\delta} c_m(t, s) dt ds,$$

где

$$c_m(t, s) = (\nabla h(\theta_m(t)), \nabla(\theta_m(s) - \theta_m(t))) + \int_{\Gamma} \lambda \theta_m(t) (\theta_m(s) - \theta_m(t)) d\Gamma -$$

$$(\eta(t) + \frac{1}{2}a_t(\theta_m(s) - \theta_m(t)), \theta_m(s) - \theta_m(t)).$$

С учетом неотрицательности $(\nabla h(\theta_m(t)), \nabla \theta_m(t)) + \int_{\Gamma} \lambda \theta_m^2(t) d\Gamma$, получаем неравенство

$$c_m(t, s) \leq \nu_1 |(\theta_m(t), \theta_m(s))_V| + (\eta(t), \theta_m(s) - \theta_m(t)) + \frac{1}{2}a_2 \|\theta_m(s) - \theta_m(t)\|^2.$$

Здесь, $\nu_1 = \max\{k_1, \|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma)}\}$. Поэтому с учетом непрерывности вложения $V \subset H$ имеем

$$c_m(t, s) \leq C (\|\eta(t)\|_{V'}^2 + \|\theta_m(t)\|_V^2 + \|\theta_m(s)\|_V^2).$$

Для оценки интегралов от членов, зависящих от t , достаточно изменить порядок интегрирования. Используя ограниченность последовательности θ_m в $L^2(0, T; V)$, получаем оценку равномерной непрерывности:

$$\int_0^{T-\delta} \|\theta_m(s + \delta) - \theta_m(s)\|^2 ds \leq C\delta. \quad (2.13)$$

Из оценки (2.13) (переходя при необходимости к подпоследовательности) следует, что $\theta_m \rightarrow \theta$ в $L^2(Q)$. Следовательно, в силу неравенства

$$|h(\theta_m) - h(\theta)| \leq k_1 |\theta_m - \theta|,$$

получаем, что $h(\theta_m) \rightarrow h(\theta)$ в $L^2(Q)$ и, следовательно, $\chi = h(\theta)$. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Если θ – произвольное слабое решение задачи (2.4) – (2.5), то оно удовлетворяет оценкам, полученным при доказательстве Теоремы 1.

Действительно, в силу равенства

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (a\theta, \theta) = (a\theta', \theta) + \frac{1}{2} (a_t \theta, \theta),$$

где $a_t = \partial a / \partial t$, функция $t \rightarrow d(a\theta, \theta) / dt$ интегрируема на $(0, T)$. Умножим первое уравнение в (2.21) в смысле скалярного произведения в H на θ и проинтегрируем по времени, как при доказательстве Теоремы 1, получим

$$\|\theta(t)\|^2 \leq \frac{K}{a_0} \exp\left(\frac{a_2 t}{a_0}\right) \text{ п.в. на } (0, T), \quad \nu \int_0^T \|\theta(s)\|_V^2 ds \leq K \exp\left(\frac{a_2 T}{a_0}\right). \quad (2.14)$$

Покажем, что решение единственно в классе функций с ограниченным градиентом.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (i) – (iv). Если θ_* является слабым решением задачи (2.4) – (2.5) таким, что $\nabla\theta_* \in L^\infty(Q)$, то других решений задачи нет.

Доказательство. Пусть θ_1 – другое решение задачи (2.4) – (2.5), $\theta = \theta_1 - \theta_*$. Тогда

$$a\theta' + A(\theta_1) - A(\theta_*) = 0, \quad \theta(0) = 0.$$

Умножим первое уравнение в смысле скалярного произведения в H на θ и проинтегрируем по времени. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\sqrt{a}\theta\|^2 + \int_0^t \left(k(\theta_1) \nabla\theta, \nabla\theta \right) + \int_\Gamma \lambda\theta^2(s) d\Gamma \Big) ds = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^t (a_t\theta, \theta) ds - \int_0^t ((k(\theta_1) - k(\theta_*)) \nabla\theta_*, \nabla\theta) ds. \end{aligned}$$

Используя ограничения на функции k , a и их производные, получаем неравенство

$$\frac{a_0}{2} \|\theta\|^2 + k_0 \int_0^t \|\nabla\theta\|^2 ds \leq \frac{a_2}{2} \int_0^t \|\theta\|^2 ds + k_2 \|\nabla\theta_*\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \|\theta\| \|\nabla\theta\| ds.$$

Учитываем, что $\|\theta\| \|\nabla\theta\| \leq \varepsilon \|\nabla\theta\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\theta\|^2$, и оценим последний член, предполагая

$$\varepsilon = \frac{k_0}{k_2 \|\nabla\theta_*\|_{L^\infty(Q)}}.$$

Тогда из неравенства Гронуолла следует, что $\theta = 0$ и решение θ_1 совпадает с θ_* .

Сведем задачу (2.1) – (2.3) к задаче (2.4) – (2.5). Для этого сначала рассмотрим краевую задачу

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla \varphi) + \mu_a \varphi = \zeta, \quad x \in G, \quad \alpha \partial_n \varphi + 0.5 \varphi = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (2.15)$$

Пусть выполнены следующие условия:

$$(r) \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_1, \quad 0 < \mu_0 \leq \mu_a(x) \leq \mu_1, \quad x \in G.$$

Определим оператор $B : V \rightarrow V'$,

$$(B\varphi, v) = (\alpha \nabla \varphi, \nabla v) + (\mu_a \varphi, v) + 0.5 \int_\Gamma \varphi v d\Gamma, \quad \forall v \in V.$$

Из леммы Лакса-Мильграма [67, р. 190] следует, что для любой функции $\zeta \in H$ существует единственное решение уравнения $B\varphi = \zeta$, которое является слабым

решением краевой задачи (2.15). Более того, обратный оператор $B^{-1} : H \rightarrow V$ непрерывен.

Задача (2.1)–(2.3) теперь сводится к задаче (2.4)–(2.5) если мы положим

$$f = u_1\chi + u_2\mu_a B^{-1}\chi, \quad u_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (i)–(iv), (r). Тогда существует решение задачи (2.1)–(2.3), $\{\theta, \varphi\} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \times L^\infty(0, T; V)$. Если к тому же $\nabla\theta \in L^\infty(Q)$, то решение единственно.

2.1.3 Вычислительный эксперимент

Приведем итерационный алгоритм решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.3), на каждой итерации которого решается линейная начально-краевая задача:

$$\begin{aligned} a\partial\theta^m/\partial t - \nabla \cdot (k(\theta^{m-1})\nabla\theta^m) &= u_1\chi + u_2\mu_a B^{-1}\chi, \\ k(\theta^{m-1})\partial_n\theta^m + \lambda(\theta^m - \theta_b) &= 0, \quad \theta^m|_{t=0} = \theta_0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь, θ^{m-1} , $m = 1, 2, \dots$ – температурное поле, полученное на предыдущей итерации. Разрешимость линейной задачи (2.16) хорошо известна. Аналогично доказательству Теоремы 1 выводятся следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\theta^m(t)\|^2 &\leq \frac{K}{a_0} \exp\left(\frac{a_2 t}{a_0}\right) \text{ п.в. на } (0, T), \quad \nu \int_0^T \|\theta^m(s)\|_V^2 ds \leq K \exp\left(\frac{a_2 T}{a_0}\right), \\ \int_0^{T-\delta} \|\theta^m(s+\delta) - \theta^m(s)\|^2 ds &\leq C\delta. \end{aligned}$$

Из этих оценок (переходя при необходимости на подпоследовательность) следует сходимость:

$$\theta^m \rightarrow \theta \quad \text{слабо в } L^2(0, T; V), \quad \text{сильно в } L^2(0, T; H).$$

Это позволяет нам перейти к пределу в (2.16). В итоге получаем, что θ является решением задачи (2.1)–(2.3).

Перейдем к описанию вычислительного эксперимента, моделирующего процедуру ВВЛА. Эффективность лазерной абляции можно оценить по поведению профилей температуры в различных точках расчетной области. Анализ температурных профилей дает возможность оценить, достаточен ли уровень температуры внутри вены для облитерации и в то же время будет ли тепловое воздействие вне вены безопасным для живой ткани. Перенос тепла и излучения будем рассчитывать в среде, состоящей из четырех подобластей, включающих кровь, стенки вены, перивенозную ткань и оптоволоконно. Схема расчетной области G с границей Γ в цилиндрической системе координат, при угловой симметрии, приведена на рис. 2.1. На рисунке отмечены точки наблюдения и начальное по-

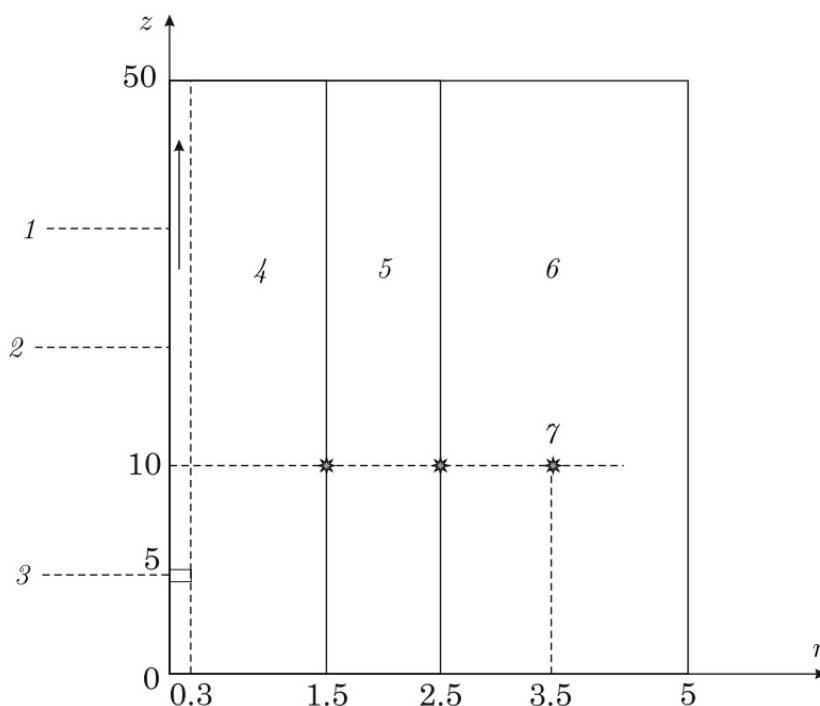


Рисунок 2.1 — Расчётная область в мм: 1 — направление движения, 2 — оптоволоконно, 3 — карбонизированный слой, 4 — кровь, 5 — вена, 6 — перивенозная ткань, 7 — линия наблюдения

ложение оптоволоконно. Толщина карбонизированного слоя 0.2 мм. Оптические и теплофизические параметры задачи, представлены в таблице 1. Параметры θ_b и θ_0 , описывающие соответственно граничную и начальную температуры, равны 37°C , а коэффициент теплопередачи $\lambda = 1 \text{ Вт/мм}^2\text{K}$. Во всех расчетах начальное положение наконечника оптоволоконно соответствует $z = 5$, и скорость его движения составляет 2 мм/с.

Таблица 1 — Оптические и термофизические параметры

Части среды	$\mu_\alpha, \text{мм}^{-1}$	$\mu_s, \text{мм}^{-1}$	$k, \text{Вт}/(\text{мм} \cdot \text{К})$	$\rho, \text{кг}/\text{мм}^3$	$c_p, \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
Кровь	0.12	0.58	$0.6 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$	4181
Стенка вены	0.12	1.95	$0.56 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-6}$	3780
Перивенозная ткань	0.034	0.98	$0.56 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-6}$	3780
Оптоволокно	—	—	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$	703

Моделирование переноса тепла потоком пузырьков, исходящих от наконечника оптоволокна, будем осуществлять, используя следующее представление для коэффициента теплопроводности крови [43—45]:

$$k(r, t) = \begin{cases} k_0, & \text{если } \theta(r, t) < 95^\circ\text{C}, \\ 200k_0, & \text{если } \theta(r, t) \geq 95^\circ\text{C}, \end{cases} \quad (2.17)$$

где k_0 — значение коэффициента теплопроводности крови, соответствующее температуре в начальный момент времени.

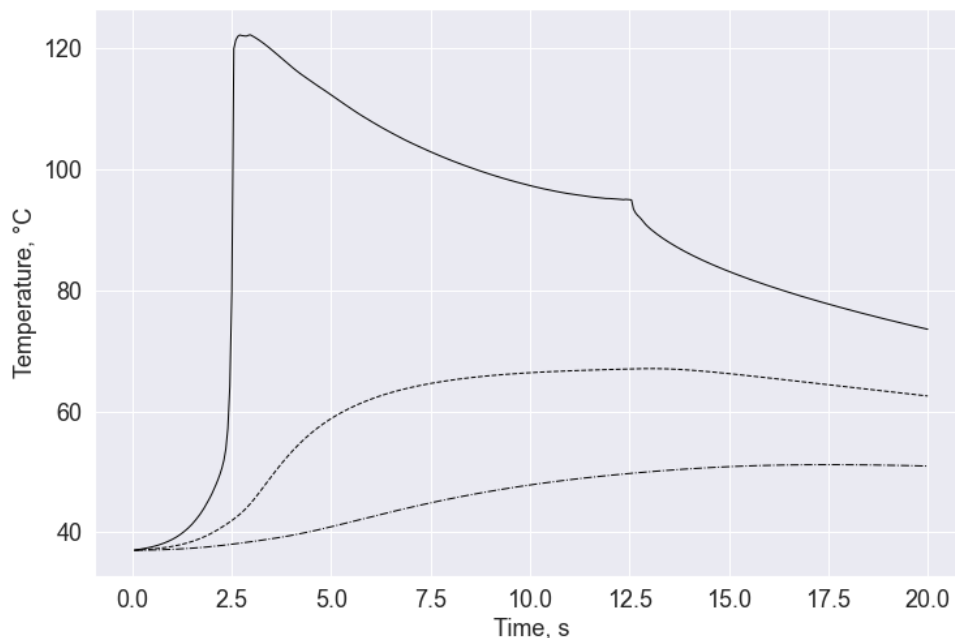


Рисунок 2.2 — Температурные профили в точках: (1.5, 10) — внутренняя стенка вены (сплошная линия); (2.5, 10) — внешняя стенка вены (штриховая линия); (3.5, 10) — перивенозная ткань (штрих-пунктирная линия).

Для реализации каждого шага итерационного алгоритма эксперимента (2.16) использовался метод конечных элементов с использованием программного пакета FreeFEM++ [68]. На рис. 2.2 демонстрируется поведение температурных профилей в трех точках наблюдения (1.5, 10), (2.5, 10) и (3.5, 10) при излучении со следующим распределением мощности источника: $(u_1, u_2) = (3, 7)$ (здесь и далее мощность дается в Ваттах). Точки наблюдения изображены на рис. 2.1 и находятся на внутренней стенке вены, на внешней стенке вены и в перивенозной ткани. Как видно из графика, несмотря на высокую температуру внутри вены, температура в перивенозной ткани является вполне безопасной.

2.2 Модель внутривенной лазерной абляции с учетом излучения черного тела

2.2.1 Постановка и формализация начально-краевой задачи для модели внутривенной лазерной абляции

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу в ограниченной трехмерной области G с отражающей границей $\Gamma = \partial G$:

$$a\partial\theta/\partial t - \nabla \cdot (k\nabla\theta) + b(|\theta^3|\theta - \varphi) = f, \quad (2.18)$$

$$-\nabla \cdot (\alpha\nabla\varphi) + \beta(\varphi - |\theta^3|\theta) = g, \quad x \in G, \quad 0 < t < T, \quad (2.19)$$

$$k\partial_n\theta + \lambda(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (2.20)$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения. λ – коэффициент теплопередачи, коэффициенты $b = 4\sigma n^2\mu_a T_c^3$, $\alpha = (3\mu - A\mu_s)^{-1}$, $\beta = \mu_a$, $\gamma = \varepsilon/(2(2 - \varepsilon))$ описывают радиационные и теплофизические свойства среды, f и g описывают вклад источников тепла и излучения соответственно.

Предположим, что G — липшицева ограниченная область, $\Gamma = \partial G$, $Q = G \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Обозначим через L^p , $1 \leq p \leq \infty$ пространство Лебега, через H^1 пространство Соболева W_2^1 и через $L^p(0, T; X)$ пространство Лебега функций из L^p , определенных на $(0, T)$, со значениями в банаховом пространстве X . Пусть $H = L^2(G)$, $V = H^1(G)$, а пространство V' двойственно к

V . Тогда мы отождествим H с его двойственным пространством H' таким, что $V \subset H = H' \subset V'$, и обозначим через $\|\cdot\|$ норму в H , а через (h, v) значение функционала $h \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $h \in H$.

Предположим, что исходные данные удовлетворяют следующим условиям:

$$(b1) \quad \alpha, \beta, a \in L^\infty(G), \quad b = r\beta, \quad r = Const > 0; \quad \alpha \geq \alpha_0, \quad \beta \geq \beta_0, \\ a \geq a_0, \quad \alpha_0, \beta_0, a_0 = Const > 0.$$

$$(b2) \quad 0 < k_0 \leq k(s) \leq k_1, \quad |k'(s)| \leq k_2, \quad s \in \mathbb{R}, \quad k_j = Const.$$

$$(b3) \quad 0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Sigma), \quad 0 \leq \theta_0 \in L^\infty(G); \quad \gamma_0 \leq \gamma \in L^\infty(\Gamma), \\ \lambda_0 \leq \lambda \in L^\infty(\Gamma), \quad \gamma_0, \lambda_0 = Const > 0.$$

$$(b4) \quad 0 \leq f, g \in L^\infty(Q).$$

Пусть

$$W = \{y \in L^2(0, T; V) : ay' = ady/dt \in L^2(0, T; V')\}.$$

Введем обозначение $[s]^q = |s|^q \text{sign} s$, $q > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Отметим, что функция $[s]^q$ является монотонной. Определим операторы $A_1: V \rightarrow V'_0$ и $A_2: V \rightarrow V'$ такие, что для всех θ, φ, v выполняются следующие равенства:

$$(A_1(\theta), v) = (k(\theta)\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma \lambda\theta v d\Gamma = (\nabla h(\theta), \nabla v) + \int_\Gamma \lambda\theta v d\Gamma,$$

$$(A_2\varphi, v) = (\alpha\nabla\varphi, \nabla v) + \int_\Gamma \gamma\varphi v d\Gamma,$$

где

$$h(s) = \int_0^s k(r) dr.$$

Определение 2. Пара $\theta \in W$, $\varphi \in L^2(0, T; V)$ называется слабым решением (2.18)–(2.20) если

$$a\theta' + A_1(\theta) + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f \quad \text{н. в. на } (0, T), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (2.21)$$

$$A_2\varphi + \beta(\varphi - [\theta]^4) = g_b + g \quad \text{н. в. на } (0, T). \quad (2.22)$$

Здесь, $f_b, g_b \in L^2(0, T; V')$ и

$$(f_b, v) = \int_\Gamma \lambda\theta_b v d\Gamma, \quad (g_b, v) = \int_\Gamma \gamma\theta_b^4 v d\Gamma \quad \forall v \in V.$$

2.2.2 Итерационный метод решения начально-краевой задачи

Для описания итерационного алгоритма введем следующие операторы: $F_1 : L^\infty(G) \rightarrow V$ и $F_2 : L^\infty(Q) \times L^2(0, T; V) \rightarrow W$. Пусть $\varphi = F_1(\theta)$, если

$$A_2\varphi + \beta(\varphi - [\theta]^4) = g_b + g, \quad (2.23)$$

и $\theta = F_2(\zeta, \varphi)$ если

$$a\theta' + A(\zeta, \theta) + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f \quad \text{п. в. на } (0, T), \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (2.24)$$

Здесь,

$$(A(\zeta, \theta), v) = (k(\zeta)\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \lambda\theta v d\Gamma \quad \forall v \in V.$$

Пусть $w(t) = M_0 + M_1t$, $t \in [0, T]$, где

$$M_0 = \max\{\|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(G)}\},$$

$$M_1 = a_0^{-1} (\|f\|_{L^\infty(Q)} + \max bM_2), \quad M_2 = \beta_0^{-1}\|g\|_{L^\infty(Q)}.$$

Лемма 1. Если выполнены условия (b1)–(b4), $0 \leq \theta \leq w(t)$, $\varphi = F_1(\theta)$, тогда

$$0 \leq \varphi \leq w^4(t) + M_2. \quad (2.25)$$

Доказательство. Умножая (2.23) на

$$\psi = \max\{\varphi - M_2 - w^4, 0\} \in L^2(0, T; V),$$

получаем

$$(A_2\varphi - g_b, \psi) + (\beta(\varphi - M_2 - [\theta]^4), \psi) = (g - \beta M_2, \psi) \leq 0.$$

Заметим, что с учетом ограничений на θ выполняются следующие неравенства:

$$(A_2\varphi - g_b, \psi) = (\alpha\nabla\psi, \nabla\psi) + \int_{\Gamma} \gamma(\varphi - \theta_b^4) d\Gamma \geq (\alpha\nabla\psi, \nabla\psi),$$

$$(\beta(\varphi - M_2 - [\theta]^4), \psi) = (\beta\psi, \psi) + (\beta(w^4 - [\theta]^4), \psi) \geq (\beta\psi, \psi).$$

Поэтому, $\psi = 0$ и $\varphi \leq w^4 + M_2$.

Далее, умножим (2.23) на $\xi = \min\{\varphi, 0\} \in L^2(0, T; V)$, аналогично получаем, что $\xi = 0$. Таким образом, $\varphi \geq 0$.

Лемма 2. Если выполнены условия (b1)–(b4), $0 \leq \varphi \leq w^4(t) + M_2$, $\theta = F_2(\zeta, \varphi)$, $\zeta \in L^\infty(Q)$, тогда $0 \leq \theta \leq w(t)$.

Доказательство. Пусть $\widehat{\theta} = \theta - w$. Перепишем уравнение (2.24) следующим образом

$$a\widehat{\theta}' + A(\zeta, \theta) - f_b + b([\widehat{\theta} + w]^4 - (\varphi - M_2)) = f - aM_1 + bM_2 \leq 0, \quad (2.26)$$

Умножим (2.26) на $\eta = \max\{\widehat{\theta}, 0\} \in W$. Отметим, что значение правой части неположительно, а также

$$\begin{aligned} (a\widehat{\theta}', \eta) &= (a\eta', \eta) = \frac{d}{2dt}(a\eta, \eta), \\ (A(\zeta, \theta) - f_b, \eta) &= (k(\zeta)\nabla\eta, \nabla\eta) + \int_{\Gamma} \lambda(\widehat{\theta} + w - \theta_b)\eta d\Gamma \geq 0, \\ ([\widehat{\theta} + w]^4 - w^4) \max\{\widehat{\theta}, 0\} &\geq 0, \quad (w^4 + M_2 - \varphi)\eta \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}(a\eta, \eta) \leq 0, \quad \eta|_{t=0} = 0.$$

Таким образом, $\eta = 0$, $\widehat{\theta} \leq 0$, $\theta \leq w$. Аналогично умножаем (2.26) на $\eta = \min\{\theta, 0\} \in W$, получим, что $\eta = 0$, $\theta \geq 0$.

Пусть $\varphi_0 = F_1(\theta_0)$. Определим рекурсивные последовательности $\theta_m \in W$, $\varphi_m \in L^2(0, T; V)$ так, что

$$\theta_m = F_2(\theta_{m-1}, \varphi_{m-1}), \quad \varphi_m = F_1(\theta_m), \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

Леммы 1 и 2 дают следующие оценки

$$0 \leq \varphi_m \leq w^4(t) + M_2, \quad 0 \leq \theta_m \leq w(t), \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

Лемма 3. Если выполняются условия (b1)–(b4), то существует константа $C > 0$, не зависящая от m , такая, что

$$\|\varphi_m\|_{L^2(0, T; V)} \leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^2(0, T; V)} \leq C, \quad (2.29)$$

$$\int_0^{T-\delta} \|\theta_m(s + \delta) - \theta_m(s)\|^2 ds \leq C\delta. \quad (2.30)$$

Доказательство. Из определения последовательностей φ_m, θ_m следуют равенства

$$A_2\varphi_m + \beta(\varphi_m - [\theta_m]^4) = g_b + g, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} a\theta'_m + A(\theta_{m-1}, \theta_m) + b([\theta_m]^4 - \varphi_{m-1}) &= f_b + f \quad \text{п. в. на } (0, T), \\ \theta_m(0) &= \theta_0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Оценки (2.29) выводятся стандартным образом из уравнений (2.31) и (2.32), а также неравенств (2.28), означающих ограниченность последовательностей φ_m, θ_m в пространстве $L^\infty(Q)$.

Получим оценку, гарантирующую компактность последовательность θ_m в $L^2(Q)$. Перепишем (2.32) как

$$a\theta'_m = \chi_m \quad \text{п. в. на } (0, T), \quad \theta_m(0) = \theta_0, \quad (2.33)$$

где

$$-\chi_m = A(\theta_{m-1}, \theta_m) + b([\theta_m]^4 - \varphi_{m-1}) - f_b - f.$$

Заметим, что с учетом полученных оценок последовательность χ_m ограничена в $L^2(0, T; V')$. Умножим (2.33) на $\theta_m(t) - \theta_m(s)$ и проинтегрируем по t на интервале $(s, s + \delta)$ и по s на $(0, T - \delta)$, предполагая, что $\delta > 0$ достаточно мало. В результате получаем

$$\frac{1}{2} \int_0^{T-\delta} \|\sqrt{a}(\theta_m(s + \delta) - \theta_m(s))\|^2 ds = \int_0^{T-\delta} \int_s^{s+\delta} c_m(t, s) dt ds,$$

где

$$c_m(t, s) = (\chi_m(t), \theta_m(t) - \theta_m(s)) \leq \|\chi_m(t)\|_{V'}^2 + \frac{1}{2}\|\theta_m(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}\|\theta_m(s)\|_V^2.$$

Для оценки интегралов от слагаемых, зависящих от t , достаточно изменить порядок интегрирования. Используя ограниченность последовательностей θ_m в $L^2(0, T; V)$ и χ_m в $L^2(0, T; V')$, получаем оценку равномерной непрерывности (2.30).

Полученные оценки (2.29), (2.30) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательностям, что существуют функции $\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}$ такие, что

$$\begin{aligned} \theta_m &\rightarrow \widehat{\theta} \quad \text{слабо в } L^2(0, T; V), \quad \text{сильно в } L^2(0, T; H), \\ \varphi_m &\rightarrow \widehat{\varphi} \quad \text{слабо в } L^2(0, T; V). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Результатов сходимости (2.34) достаточно для предельного перехода при $t \rightarrow \infty$ в равенствах (2.31), (2.32) и доказательства того, что предельные функции $\widehat{\theta}, \widehat{\varphi} \in L^2(0, T; V)$ таковы, что $a\widehat{\theta}' \in L^2(0, T; V')$ и выполняются равенства (2.21), (2.22).

Теорема 4. *Если выполнены условия (b1) – (b4), тогда задача (2.18) – (2.20) имеет хотя бы одно решение.*

2.2.3 Единственность решения и сходимость итерационного процесса

Покажем, что в классе функций с ограниченным градиентом температуры решение единственно. Это позволяет доказать сходимость итерационной процедуры.

Теорема 5. *Если выполнены условия (b1) – (b4) и θ_*, φ_* – решение задачи (2.18) – (2.20) такое, что $\theta_*, \nabla\theta_* \in L^\infty(Q)$, то других ограниченных решений этой задачи нет.*

Доказательство. Пусть θ_1, φ_1 – другое решение задачи (2.18) – (2.20), $\theta = \theta_1 - \theta_*, \varphi = \varphi_1 - \varphi_*$. Тогда

$$a\theta' + A_1(\theta_1) - A_1(\theta_*) + b([\theta_1]^4 - [\theta_*]^4 - \varphi) = 0 \quad \text{п. в. на } (0, T), \quad \theta(0) = 0. \quad (2.35)$$

$$A_2\varphi + \beta(\varphi - ([\theta_1]^4 - [\theta_*]^4)) = 0 \quad \text{п. в. на } (0, T). \quad (2.36)$$

Умножим (2.35) на θ и проинтегрируем по времени. В результате получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\sqrt{a}\theta\|^2 + \int_0^t \left((k(\theta_1)\nabla\theta, \nabla\theta) + \int_{\Gamma} \lambda\theta^2(s)d\Gamma \right) ds = \\ & - \int_0^t (b([\theta_1]^4 - [\theta_*]^4 - \varphi), \theta) ds - \int_0^t ((k(\theta_1) - k(\theta_*))\nabla\theta_*, \nabla\theta) ds. \end{aligned}$$

Пусть $|\theta_1| \leq M$, $|\theta_*| \leq M$. С учетом ограничения на функцию k получаем неравенство

$$\frac{a_0}{2} \|\theta\|^2 + k_0 \int_0^t \|\nabla \theta\|^2 ds \leq \int_0^t (4M \max b \|\theta\|^2 + \|\varphi\| \|\theta\|) ds + k_2 \|\nabla \theta_*\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \|\theta\| \|\nabla \theta\| ds. \quad (2.37)$$

Принимая во внимание, что $\|\theta\| \|\nabla \theta\| \leq \varepsilon \|\nabla \theta\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\theta\|^2$ и предполагая

$$\varepsilon = \frac{k_0}{k_2 \|\nabla \theta_*\|_{L^\infty(Q)}},$$

из (2.37), получаем

$$\frac{a_0}{2} \|\theta\|^2 \leq \int_0^t (4M \max b \|\theta\|^2 + \|\varphi\| \|\theta\|) ds + \frac{1}{4\varepsilon} k_2 \|\nabla \theta_*\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \|\theta\|^2 ds. \quad (2.38)$$

Умножим (2.36) на φ , и получим

$$(A_2 \varphi, \varphi) + (\beta \varphi, \varphi) = (\beta([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4), \varphi) \leq 4 \max \beta M^3 \|\theta\| \|\varphi\|.$$

Следовательно, $\|\varphi\| \leq 4\beta_0^{-1} \max \beta M^3 \|\theta\|$. Тогда из (2.38) и неравенства Гронуолла следует, что $\theta = 0$, θ_1 совпадает с θ_* и, соответственно, φ_1 совпадает с φ_* .

Теорема 6. Если выполнены условия (b1)–(b4) и θ_* , φ_* – решение задачи (2.18)–(2.20) такое, что θ_* , $\nabla \theta_* \in L^\infty(Q)$, тогда для последовательностей (2.27) справедливы следующие сходимости:

$$\theta_m \rightarrow \theta_* \text{ в } L^2(0, T; V), \quad \varphi_m \rightarrow \varphi_* \text{ в } L^2(0, T; V).$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\theta_m \rightarrow \theta_*$ в $L^2(0, T; H)$. Предполагая противное, заключаем, что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $\theta_{m'}$ такие, что $\|\theta_{m'} - \theta_*\|_{L^2(0, T; H)} \geq \varepsilon_0$. Оценки (2.29), (2.30) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательностям, что результаты сходимости (2.34) верны, где $\widehat{\theta}$, $\widehat{\varphi}$ также является решением задачи (2.18)–(2.20). Следовательно, $\|\widehat{\theta} - \theta_*\|_{L^2(0, T; H)} \geq \varepsilon_0$, что противоречит теореме 5 о единственности решения. Из уравнений (2.31) и (2.32), с учетом (2.28), т.е. условием ограниченности последовательностей в $L^\infty(Q)$, а также доказанной сходимости θ_m в $L^2(0, T; H)$, следуют сходимости $\theta_m \rightarrow \theta_*$, $\varphi_m \rightarrow \varphi_*$, в $L^2(0, T; V)$.

2.2.4 Вычислительный эксперимент

Чтобы найти решение начально-краевой задачи (2.18)–(2.20), мы дискретизируем временной интервал $(0, T)$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$. Для каждого момента времени $t = t_l = l\Delta t$, $l = 1, 2, \dots, N$ используется итерационный алгоритм нахождения решения соответствующей краевой задачи. При этом, m -й шаг итерационной процедуры ($m = 1, 2, \dots, M$) записывается следующим образом

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla \varphi_m) + \beta(\varphi_m - |\theta_{m-1}^3| \theta_{m-1}) = g, \quad (2.39)$$

$$a \partial \theta_m / \partial t - \nabla \cdot (k(\theta_{m-1}) \nabla \theta_m) - b(|\theta_{m-1}^3| \theta_m - \varphi_m) = f, \quad x \in G, \quad (2.40)$$

$$k(\theta_{m-1}) \partial_n \theta_m + \lambda(\theta_m - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha \partial_n \varphi_m + \gamma(\varphi_m - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad (2.41)$$

где производная по времени в (2.40) аппроксимируется следующим образом

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial t} \simeq \frac{\theta_m|_{t=t_l} - \theta_m|_{t=t_{l-1}}}{\Delta t},$$

а функции θ_m , θ_{m-1} , φ_m в (2.39)–(2.41) являются приближениями решения, соответствующее моменту времени $t = t_l$. Нижний индекс у функций θ_m , θ_{m-1} и φ_m означает номер итерации.

Для инициализации итерационной процедуры задаем начальное приближение температуры для каждого момента времени:

$$\theta_0|_{t=t_l} = \theta_M|_{t=t_{l-1}}, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad \theta_M|_{t=t_0} = \theta_0. \quad (2.42)$$

Для реализации каждого шага численного эксперимента (2.39)–(2.42) использовался метод конечных элементов с использованием программного пакета FreeFEM++ [68]. Оптические и теплофизические параметры среды взяты из [45]. Параметры θ_b и θ_0 соответствуют температуре 37°C , а коэффициент $\lambda = 1 \text{ Вт/мм}^2\text{K}$. Во всех расчетах начальное положение наконечника оптического волокна соответствует $(r, z) = (0, 5)$, а его скорость составляет 2 мм/с . Следуя [43, 45], перенос тепла потоком пузырьков, образующихся на конце горячего волокна, моделируем через коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры следующим образом: при достижении температуры в некоторой точке крови 95°C и выше коэффициент теплопроводности увеличивается в 200 раз.

Эффективность лазерной абляции можно оценить по поведению профилей температуры в разных точках расчетной области. Основными параметрами процедуры лазерной абляции являются мощность лазера, длина волны излучения,

скорость вытягивания оптического волокна и соотношение мощностей лазера, затрачиваемых на излучение и нагрев наконечника волокна. Заметим, что решение задачи (2.18)–(2.20) зависит от длины волны неявно, параметрами α и β , описывающими радиационные свойства среды (см. таблицы значений коэффициента поглощения и приведенного коэффициента рассеяния, определяющих параметры α и β [43, 45]). На рисунке 2.3 показано поведение профилей температуры

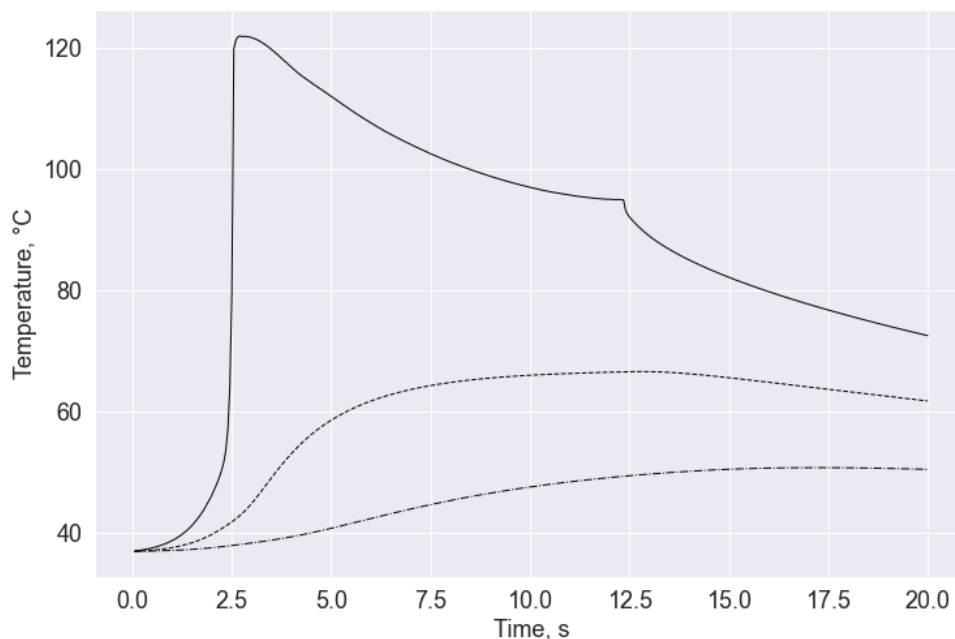


Рисунок 2.3 — Температурные профили в точках: (1.5, 10) — внутренняя стенка вены (сплошная линия); (2.5, 10) — внешняя стенка вены (штриховая линия); (3.5, 10) — перивенозная ткань (штрих-пунктирная линия).

для излучения с длиной волны 1064 нм. Модель ВВЛА, учитывающая излучение черного тела, демонстрирует эффективность процедуры лазерной абляции при выбранных характеристиках излучения. А именно, температура на внутренней стенке вены поддерживается на уровне, достаточном для ее облитерации, в то же время, температура в окружающей вену перивенозной ткани является достаточно безопасной.

Глава 3. Задача оптимального управления

Алгоритмы решения начально краевых задач для моделей ВВЛА, представленные во главе 2, могут применяться для подбора оптимальных характеристик процедуры ВВЛА, таких как: скорость вытягивания оптоволокна, мощность излучения, чернота наконечника оптоволокна, длина волны лазерного излучения. Однако, выбор оптимальных характеристик, основанный на решении начально-краевых задач требует прямой перебор параметров модели и таким образом сопряжен со значительными вычислительными затратами. Также остается открытым вопрос существования оптимального состояния. Перспективным направлением оптимизации процедуры лазерной абляции является ее сведение к решению обратной экстремальной задачи для модели ВВЛА. В настоящей главе представлен теоретический анализ и решение задач оптимального управления для моделей ВВЛА с учетом и без учета излучения черного тела. В качестве управления берется мощность лазерного излучения, идущие на излучение и на нагрев наконечника оптоволокна.

3.1 Оптимальное управление с фазовыми ограничениями для модели внутривенной лазерной абляции без учета излучения черного тела

3.1.1 Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления для квазилинейных уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена, моделирующую процесс внутривенной лазерной абляции в ограниченной области G с отражающей границей $\Gamma = \partial G$. Задача состоит в том, чтобы минимизировать функционал,

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt \rightarrow \inf, \quad (3.1)$$

на решениях начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} a\partial\theta/\partial t - \nabla \cdot (k(\theta)\nabla\theta) - \beta\varphi &= u_1\chi, \\ -\nabla \cdot (\alpha\nabla\varphi) + \beta\varphi &= u_2\chi, \quad x \in G, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\theta|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + 0.5\varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (3.3)$$

при этом учитываются ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*. \quad (3.4)$$

здесь коэффициенты $b = 4\sigma n^2 \mu_a T_c^3$, $\alpha = (3\mu - A\mu_s)^{-1}$, $\beta = \mu_a$, $\gamma = \varepsilon/(2(2 - \varepsilon))$ описывают радиационные и теплофизические свойства среды, G_1 и G_2 — под-области G , P — максимальная мощность лазерного источника. Правые части уравнений 3.2 описывают источники тепла и излучения, локализованные в области наконечника оптоволокна, χ — характеристическая функция части среды, в которой находится наконечника оптоволокна, разделенная на объем наконечника, u_1 и u_2 — мощности источника, идущие на нагрев наконечника оптоволокна и на излучение соответственно.

Как и раньше, перенос тепла потоком пузырьков моделируется с использованием кусочно-постоянного коэффициента теплопроводности, который зависит от температуры следующим образом: когда температура достигает 95°C , коэффициент теплопроводности увеличивается в 200 раз. Следуя задаче оптимального управления, требуется обеспечить заданное распределение температурного поля θ_d в подобласти G_1 , при этом температура в подобласти G_2 не может превышать (если это возможно) критического значения $\theta_* = \text{Const} > 0$.

Пусть G — ограниченная липшицева область, $\Gamma = \partial G$, $Q = G \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Обозначим через L^p , $1 \leq p \leq \infty$ пространство Лебега, через H^1 пространство Соболева W_2^1 , через H_0^1 подпространство функций из H^1 с нулевыми граничными значениями, а через $L^p(0, T; X)$ пространство Лебега функций из L^p , определенных на $(0, T)$, со значениями в банаховом пространстве X .

Пусть $H = L^2(G)$, $V = H_0^1(G)$, а пространство V' двойственно к V . Затем мы отождествляем H с его двойственным пространством H' таким, что $V \subset H^1(G) \subset H = H' \subset (H^1(G))' \subset V'$, и обозначим через $\|\cdot\|$ норму в H , а через (h, v) значение функционала $h \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее с скалярный продукт в H , если $h \in H$. Скалярный произведение в V определяется как $(u, v)_V = (\nabla u, \nabla v)$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$(c1) \ a_0 \leq a \leq a_1, \quad |\partial a / \partial t| \leq a_2,$$

$$(c2) \ k_0 \leq k(s) \leq k_1, \quad |k'(s)| \leq k_2, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$(c3) \ \theta_0 \in H,$$

$$(c4) \ \alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_1, \quad \beta_0 \leq \beta(x) \leq \beta_1, \quad x \in G,$$

где a_i, k_i, α_i , и β_i положительные константы.

Определим нелинейный оператор $A: V \rightarrow V'$ и линейный оператор $B: H^1(G) \rightarrow (H^1(G))'$, используя следующее равенство, справедливое для любых $\theta, v \in V, \varphi, w \in H^1(G)$:

$$(A(\theta), v) = (k(\theta)\nabla\theta, \nabla v) = (\nabla h(\theta), \nabla v),$$

$$(B\varphi, w) = (\alpha\nabla\varphi, \nabla w) + (\beta\varphi, w) + 0.5 \int_{\Gamma} \varphi w d\Gamma,$$

где

$$h(s) = \int_0^s k(r) dr.$$

Определение 3. Пусть $u_{1,2} \in L^2(0, T)$. Пара функций $\theta \in L^2(0, T; V)$, $\varphi \in L^2(0, T; H^1(G))$ называется слабым решением задачи (3.2)–(3.3), если $a\theta' \in L^2(0, T; V')$ и

$$a\theta' + A(\theta) - \beta\varphi = u_1\chi, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad B\varphi = u_2\chi, \quad (3.5)$$

где $\theta' = d\theta/dt$.

Из леммы Лакса-Мильграма [67, р. 190] следует, что для любой функции $g \in H$ существует единственное решение уравнения $B\varphi = g$. При этом обратный оператор $B^{-1}H \rightarrow H^1(G)$ непрерывен. Поэтому можно исключить интенсивность излучения $\varphi = u_2 B^{-1}\chi$ и сформулировать задачу оптимального управления следующим образом.

Задача (P)

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt \rightarrow \inf,$$

$$a\theta' + A(\theta) = u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*, \quad u \in U_{ad},$$

где

$$U_{ad} = \{u = u_1\chi + u_2\beta B^{-1}\chi : u_{1,2} \in L^2(0, T), u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}.$$

3.1.2 Разрешимость задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу

$$a\theta' + A(\theta) = f, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (3.6)$$

Справедлива следующая лемма [34].

Лемма 4. Пусть выполняются условия (с1)–(с3) и $f \in L^2(0, T; V')$. Тогда существует решение задачи (3.6) такое, что $\theta \in L^\infty(0, T; H)$ и справедливы следующие оценки:

$$\|\theta(t)\|^2 \leq \frac{K}{a_0} \exp \frac{a_2 t}{a_0} \quad \text{п.в. на } (0, T),$$

$$\int_0^T \|\theta(t)\|_V^2 dt \leq \frac{K}{k_0} \left(1 + \frac{a_2 T}{a_0} \exp \frac{a_2 T}{a_0} \right), \quad (3.7)$$

где $K = a_1 \|\theta_0\|^2 + k_0^{-1} \|f\|_{L^2(0, T; V')}$.

Следующий результат важен для установления непустоты множества допустимых пар управление–состояние.

Лемма 5. Пусть выполняются условия (с1)–(с3), $f = 0$, $\theta_0 \leq \theta_*$ п.в. в G , и θ – решение задачи (3.6). Тогда $\theta \leq \theta_*$ п.в. в $G \times (0, T)$.

Доказательство. Умножая, скалярно в H первое уравнение (3.6) на $v = \max\{\theta - \theta_*, 0\} \in L^2(0, T; V)$, получаем

$$(av', v) + (k(\theta)\nabla v, \nabla v) = 0.$$

Отбрасывая неотрицательный второй член, приходим к оценке

$$\frac{d}{dt}(av, v) \leq (a_t v, v) \leq a_2 \|v\|^2.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по времени, учитывая, что $v|_{t=0} = 0$. В результате приходим к неравенству

$$a_0 \|v(t)\|^2 \leq (av(t), v(t)) \leq a_2 \int_0^t \|v(\tau)\|^2 d\tau.$$

На основании леммы Гронуолла [69] заключаем, что $v = 0$ и, следовательно, $\theta \leq \theta_*$ п.в. в $G \times (0, T)$.

Теорема 7. Пусть выполняются условия (c1)–(c3), и $\theta_0 \leq \theta_*$ п.в. в G . Тогда решение задачи (P) существует.

Доказательство. По леммам 4 и 5 множество допустимых пар непусто. Рассмотрим минимизирующую последовательность допустимых пар $\{\theta_m, u_m\} \in L^2(0, T; V) \times U_{ad}$ таких, что $J(\theta_m) \rightarrow j = \inf J$, где

$$a\theta'_m + A(\theta_m) = u_m, \quad \theta_m(0) = \theta_0, \quad \theta_m|_{G_2} \leq \theta_*. \quad (3.8)$$

Ограниченность в $L^2(0, T; H)$ множества допустимых управлений U_{ad} дает по Лемме 4 оценки:

$$\|\theta_m\|_{L^\infty(0, T; H)} \leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^2(0, T; V)} \leq C, \quad \|h(\theta_m)\|_{L^2(0, T; V)} \leq C. \quad (3.9)$$

Здесь и далее при доказательстве теоремы через C обозначаются константы, не зависящие от m . Из оценок (3.9), используя при необходимости подпоследовательности, следует существование функций $u \in U_{ad}$, $\theta \in L^2(0, T; V)$, $\varkappa \in L^2(0, T; V)$ таких, что

$$u_m \rightarrow u \text{ слабо в } L^2(0, T; H), \quad \theta_m \rightarrow \theta \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \\ h(\theta_m) \rightarrow \varkappa \text{ слабо в } L^2(0, T; V). \quad (3.10)$$

Результаты сходимости (3.10) достаточны для предельного перехода при $m \rightarrow \infty$ в системе (3.8) и доказательства того, что предельная функция $\theta \in L^2(0, T; V)$ такова, что $a\theta' \in L^2(0, T; V')$ удовлетворяет равенству

$$(a\theta', v) + (\nabla \varkappa, \nabla v) = (u, v) \quad \forall v \in V$$

и выполнено начальное условие.

Следующая оценка гарантирует компактность последовательности θ_m в $L^2(Q)$:

$$\int_0^{T-\delta} \|\theta_m(s+\delta) - \theta_m(s)\|^2 ds \leq C\delta. \quad (3.11)$$

Из неравенства (3.11), используя при необходимости подпоследовательности, получаем, что $\theta_m \rightarrow \theta$ в $L^2(Q)$. Следовательно, в силу неравенства

$$|h(\theta_m) - h(\theta)| \leq k_1|\theta_m - \theta|,$$

закключаем, что $h(\theta_m) \rightarrow h(\theta)$ в $L^2(Q)$ и, следовательно, $\varkappa = h(\theta)$. Кроме того, предельная функция θ удовлетворяет неравенству $\theta|_{G_2} \leq \theta_*$.

Следовательно, предельная пара $\{\theta, u\} \in L^2(0, T; V) \times U_{ad}$ является допустимой. Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу,

$$j \leq J(\theta) \leq \liminf J(\theta_m) = j,$$

тогда пара $\{\theta, u\}$ – решение задачи (P).

3.1.3 Доказательство сходимости итерационного алгоритма

Для численного решения задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями $\theta|_{G_2} \leq \theta_*$ рассмотрим следующую задачу со штрафом.

Задача (P $_\varepsilon$) $J_\varepsilon(\theta) \rightarrow \inf,$

$$J_\varepsilon(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dxdt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta) dxdt,$$

$$a\theta' + A(\theta) = u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad}.$$

Здесь,

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq \theta_*, \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{если } \theta > \theta_*. \end{cases}$$

Оценки, приведенные в лемме 4, также позволяют доказать разрешимость задачи со штрафом аналогично доказательству Теоремы 7.

Теорема 8. Пусть выполняются условия (с1) – (с3). Тогда решение задачи (P $_\varepsilon$) существует.

Рассмотрим аппроксимационные свойства решений задачи со штрафом. Пусть $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ – решение задачи (P $_\varepsilon$), а $\{\theta, u\}$ – решение задачи (P). Тогда,

$$a\theta'_\varepsilon + A(\theta_\varepsilon) = u_\varepsilon, \quad \theta_\varepsilon(0) = \theta_0. \quad (3.12)$$

Так как $\theta|_{G_2} \leq \theta_*$, справедливо следующее неравенство:

$$\int_0^T \int_{G_1} (\theta_\varepsilon - \theta_d)^2 dxdt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta_\varepsilon) dxdt \leq \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dxdt = J(\theta).$$

Следовательно,

$$\int_0^T \int_{G_1} (\theta_\varepsilon - \theta_d)^2 dxdt \leq J(\theta),$$

$$\int_0^T \int_{G_2} F(\theta_\varepsilon) dxdt \leq \varepsilon J(\theta).$$

Полученные оценки, позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательностям при $\varepsilon_k \rightarrow +0$, аналогично доказательству теоремы 7, что существуют функции $\hat{u} \in U_{ad}$, $\hat{\theta} \in L^2(0, T; V)$ такие, что

$$u_\varepsilon \rightarrow \hat{u} \text{ слабо в } L^2(0, T; H), \quad \theta_\varepsilon \rightarrow \hat{\theta} \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \text{ сильно в } L^2(0, T; H).$$

Заметим что

$$\int_0^T \int_{G_2} F(\theta_\varepsilon) dxdt \rightarrow \int_0^T \int_{G_2} F(\hat{\theta}) dxdt,$$

$$\int_0^T \int_{G_2} F(\theta_\varepsilon) dxdt \rightarrow 0, \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0,$$

гарантирует, что $F(\hat{\theta}) = 0$ и $\hat{\theta}|_{G_2} \leq \theta_*$.

Результатов сходимости достаточно, чтобы перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ в системе (3.12) и доказать, что предельная пара $\{\hat{\theta}, \hat{u}\} \in L^2(0, T; V) \times U_{ad}$ является допустимой для задачи (P). Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу,

$$j \leq J(\hat{\theta}) \leq \liminf J(\theta_\varepsilon) \leq J(\theta) = j = \inf J,$$

тогда пара $\{\hat{\theta}, \hat{u}\}$ является решением задачи (P).

Теорема 9. Пусть выполняются условия (с1)–(с3), и $\theta_0 \leq \theta_*$ п.в. в G . Если $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ решение задачи (P_ε) при $\varepsilon > 0$, существует последовательность при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$u_\varepsilon \rightarrow \hat{u} \text{ слабо в } L^2(0, T; H), \quad \theta_\varepsilon \rightarrow \hat{\theta} \text{ сильно в } L^2(0, T; H),$$

где $\{\hat{\theta}, \hat{u}\}$ решение задачи (P).

3.1.4 Реализация итерационного алгоритма

Рассмотрим итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления (P_ε) для случая, когда параметры управления u_1 и u_2 не зависят от времени. На каждой итерации алгоритма решается линейно-квадратичная задача оптимального управления, в которой требуется найти минимум функционала:

$$\widehat{J}_\varepsilon(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_*} (\theta - \theta_*)^2 dx dt \rightarrow \inf, \quad u \in U_{ad}, \quad (3.13)$$

с ограничениями

$$\begin{aligned} a\partial\theta/\partial t - \nabla \cdot (k(\widehat{\theta})\nabla\theta) &= u, \quad x \in G, \quad 0 < t < T, \\ \theta|_\Gamma &= 0, \\ \theta(x, 0) &= \theta_0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь,

$$U_{ad} = \{u = u_1\chi + u_2\beta B^{-1}\chi : u_{1,2} \in \mathbb{R}, u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\},$$

$$G_* = \{x \in G_2 : \widehat{\theta}(x, t) > \theta_*\}.$$

Функция $\widehat{\theta}$ описывает температурное поле, найденное на предыдущей итерации.

В качестве зависимости коэффициента теплопроводности от температуры используется гладкая аппроксимация кусочно-постоянной функции, рассмотренной в [12, 43, 45].

Как нетрудно заметить, задача (3.13), (3.14) сводится к нахождению минимума квадратичной функции относительно параметров u_1 и u_2 :

$$\widehat{J}_\varepsilon(u_1\Theta_1 + u_2\Theta_2 + \Theta_3) \rightarrow \inf$$

на треугольнике $\{u_1, u_2 \in \mathbb{R} : u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}$. Функции Θ_1 , Θ_2 и Θ_3 вычисляются заранее как решения следующих линейных начально-краевых задач для $x \in G, t \in (0, T)$:

$$a\partial\Theta_1/\partial t - \nabla \cdot (k(\widehat{\theta})\nabla\Theta_1) = \chi, \quad \Theta_1|_\Gamma = 0, \quad \Theta_1(x, 0) = 0;$$

$$a\partial\Theta_2/\partial t - \nabla \cdot (k(\widehat{\theta})\nabla\Theta_2) = \beta B^{-1}\chi, \quad \Theta_2|_\Gamma = 0, \quad \Theta_2(x, 0) = 0;$$

$$a\partial\Theta_3/\partial t - \nabla \cdot (k(\hat{\theta})\nabla\Theta_3) = 0, \quad \Theta_3|_{\Gamma} = 0, \quad \Theta_3(x, 0) = \theta_0.$$

Для демонстрации сходимости итерационного алгоритма в качестве решения прямой начально-краевой задачи при $(u_1, u_2) = (3, 7)$ (здесь и далее единицы в ваттах) была выбрана функция θ_d . Области G_d и G_c берутся как достаточно малые окрестности точек $(1.5, 10)$, $(3.5, 10)$. Для реализации итерационного алгоритма мы взяли $\varepsilon = 0.3$ и θ_c , соответствующие 47°C . Начальное приближение (u_1, u_2) задается как $(7, 3)$.

Аппроксимации решения в точке $(1.5, 10)$ по результатам трех итераций алгоритма показаны на рис. 3.1. Черная линия — искомая температура, соответствующая $(u_1, u_2) = (3, 7)$, красная линия — аппроксимация решения на 3-м шаге, соответствующая $(u_1, u_2) = (2.25, 8.13)$. Максимальное значение температуры в точке $(3.5, 10)$ равно $49,9^\circ\text{C}$. Отметим, что при $(u_1, u_2) = (3, 7)$ максимальное значение температуры в точке $(3.5, 10)$ равно $50,4^\circ\text{C}$.

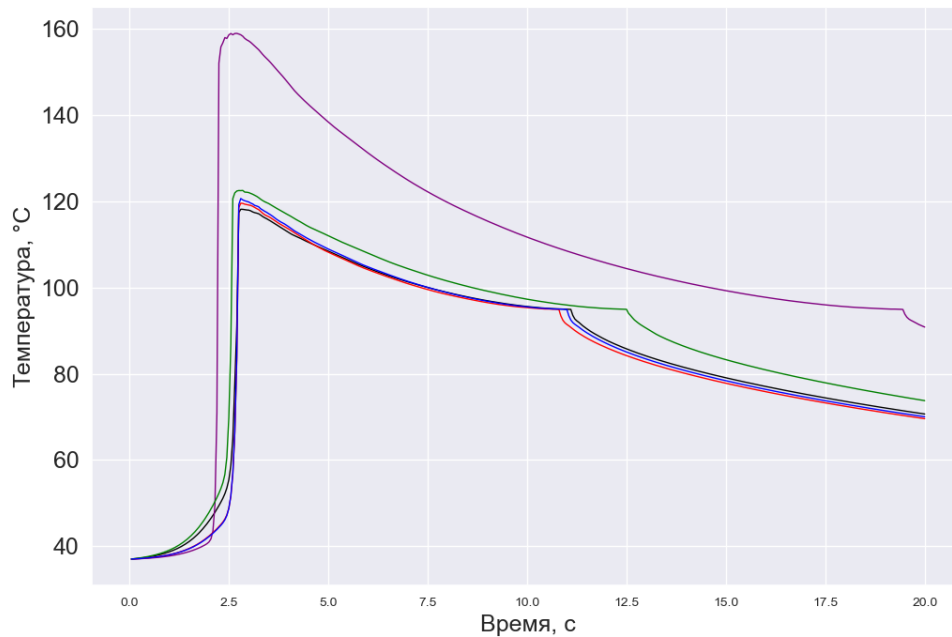


Рисунок 3.1 — Температурные профили в точке $(1.5, 10)$: искомая температура (черный), начальное приближение (фиолетовый), аппроксимация решения на 1-м шаге (зеленый), аппроксимация решения на 2-м шаге (синий), аппроксимация решения на 3-м шаге (красный).

3.2 Оптимальное управление с фазовыми ограничениями для модели внутривенной лазерной абляции с учетом излучения черного тела

3.2.1 Постановка задачи

Математическая модель, описывающая процесс ВВЛА в ограниченной трехмерной области G с границей $\Gamma = \partial G$, имеет вид:

$$a\partial\theta/\partial t - \nabla \cdot (k(\theta)\nabla\theta) + b(|\theta^3|\theta - \varphi) = C_\theta u_1, \quad (3.15)$$

$$-\nabla \cdot (\alpha\nabla\varphi) + \beta(\varphi - |\theta^3|\theta) = C_\varphi u_2, \quad x \in G, \quad 0 < t < T; \quad (3.16)$$

$$k(\theta)\partial_n\theta + \lambda(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + 0.5\varphi|_\Gamma = 0, \quad (3.17)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0. \quad (3.18)$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения.

Экстремальная обратная задача для квазилинейных уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена, описывающих процедуру ВВЛА в ограниченной области G с границей $\Gamma = \partial G$, состоит в минимизации целевого функционала

$$J(\theta, \varphi, u_1, u_2) \rightarrow \inf, \quad (3.19)$$

на решениях начально-краевой задачи (3.15)–(3.18). При этом учитываются следующие ограничения:

$$\{u_1, u_2\} \in U_{ad}, \quad \theta|_{G_c} \leq \theta_c. \quad (3.20)$$

То есть неизвестные управления u_1, u_2 принадлежат множеству допустимых управлений U_{ad} и температура в подобласти G_c не может превышать критического значения θ_c .

Пусть G — липшицева ограниченная область, $\Gamma = \partial G$; $Q = G \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Через L^p , $1 \leq p \leq \infty$ обозначим пространство Лебега, через H^1 — пространство Соболева W_2^1 , через $L^p(0, T; X)$ пространство Лебега L^p , определенное на $(0, T)$, со значениями в банаховом пространстве X .

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$(dI) \quad \alpha, \beta, a, b \in L^\infty(G), \quad \alpha \geq \alpha_0, \quad \beta \geq \beta_0, \quad a \geq a_0, \quad b \geq b_0, \quad \alpha_0, \beta_0, a_0, b_0 > 0.$$

(d2) $0 < k_0 \leq k(s) \leq k_1, |k'(s)| \leq k_2, s \in \mathbb{R}, k_j = Const.$

(d3) $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Sigma), 0 \leq \theta_0 \in L^\infty(G); \lambda_0 \leq \lambda \in L^\infty(\Gamma), \lambda_0 = Const > 0.$

(d4) $0 \leq u_1, u_2 \in L^2(Q).$

Пусть $H = L^2(G), V = H^1(G)$, а пространство V' двойственно к V . Тогда мы отождествим H с его двойственным пространством H' таким, что $V \subset H = H' \subset V'$, и обозначим через $\|\cdot\|$ норму в H , а через (h, v) значение функционала $h \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $h \in H$.

Введем пространство

$$W = \left\{ y \in L^2(0, T; V) : ay' = a \frac{dy}{dt} \in L^2(0, T; V') \right\}.$$

Пусть $[s]^q = |s|^q \text{sign } s, q > 0, s \in \mathbb{R}$. Определим операторы $A_1: V \rightarrow V', A_2: V \rightarrow V'$ такие, что $\forall \theta, \varphi, v$

$$(A_1(\theta), v) = (k(\theta)\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \lambda\theta v d\Gamma = (\nabla h(\theta), \nabla v) + \int_{\Gamma} \lambda\theta v d\Gamma,$$

$$(A_2\varphi, v) = (\alpha\nabla\varphi, \nabla v) + 0.5 \int_{\Gamma} \varphi v d\Gamma,$$

где

$$h(s) = \int_0^s k(r) dr.$$

Кроме того, $(A_2v, v)^{1/2}$ – норма функции v в V

Определение 4. Пара $\theta \in W, \varphi \in L^2(0, T; V)$ называется слабым решением (3.15)–(3.18), если

$$a\theta' + A_1(\theta) + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + C_\theta u_1, \text{ п.в. на } (0, T), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (3.21)$$

$$A_2\varphi + \beta(\varphi - [\theta]^4) = C_\varphi u_2, \text{ п.в. на } (0, T). \quad (3.22)$$

Здесь,

$$f_b \in L^2(0, T; V'), \quad (f_b, v) = \int_{\Gamma} \lambda\theta_b v d\Gamma \quad \forall v \in V.$$

Для постановки задачи оптимального управления рассмотрим пространство управлений $U = L^2(Q) \times L^2(Q)$, множество допустимых управлений U_{ad} , пространство состояний $Z = W \times L^2(0, T; V)$ и целевой функционал $J : W \times L^2(0, T; V) \times U_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

(j) $U_{ad} \subset U$ является ограниченным, выпуклым и замкнутым множеством; $0 \in U_{ad}$,

(jj) J является слабо полунепрерывным снизу.

Определим оператор ограничения

$$F : W \times L^2(0, T; V) \times U \rightarrow L^2(0, T; V') \times L^2(0, T; W') \times H,$$

$$F(\theta, \varphi, u) = \{a\theta' + A_1(\theta) + b([\theta]^4 - \varphi) - f_b - C_\theta u_1, \\ A_2\varphi + \beta(\varphi - [\theta]^4) - C_\varphi u_2, \theta(0) - \theta_0\}.$$

Задача (ОС). Найти тройки состояния–управление $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\} \in W \times L^2(0, T; V) \times U_{ad}$ такие, что $F(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}) = 0$ и

$$J(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}) = \inf\{J(\theta, \varphi, u) : u \in U_{ad}, F(\theta, \varphi, u) = 0, \theta|_{G_c} \leq \theta_c\}. \quad (3.23)$$

3.2.2 Разрешимость задачи оптимального управления

Теорема 10. Пусть выполняются условия (d1)–(d3) и (j)–(jj), и $M_0 \leq \theta_c$, где $M_0 = \max\{\|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(G)}\}$. Тогда решение задачи (ОС) существует.

Доказательство. В [55], Разрешимость задачи (3.21), (3.22) доказана в случае $u_1, u_2 \in L^\infty(Q)$ и получены оценки для решения, которые в случае $u_1 = u_2 = 0$ имеют вид $0 \leq \theta \leq M_0, 0 \leq \varphi \leq M_0^4$. Поэтому множество допустимых пар управлений–состояний в задаче (ОС) непусто.

Рассмотрим минимизирующую последовательность допустимых пар $\{y_m, u_m\} \in Z \times U_{ad}$, $y_m = \{\theta_m, \varphi_m\}$, $u_m = \{u_{1m}, u_{2m}\}$ такую, что $J(y_m, u_m) \rightarrow j = \inf J$, где

$$a\theta_m' + A_1(\theta_m) + b([\theta_m]^4 - \varphi_m) = f_b + C_\theta u_{1m}, \theta_m(0) = \theta_0; \\ A_2\varphi_m + \beta(\varphi_m - [\theta_m]^4) = C_\varphi u_{2m}; \theta_m|_{G_c} \leq \theta_c. \quad (3.24)$$

Поскольку функции из множества допустимых управлений ограничены, справедливы следующие оценки:

$$\|\theta_m\|_{L^\infty(Q)} \leq C, \|\theta_m\|_{L^2(0, T; V)} \leq C, \\ \|h(\theta_m)\|_{L^2(0, T; V)} \leq C, \|\varphi_m\|_{L^\infty(Q)} \leq C. \quad (3.25)$$

Здесь и далее при доказательстве теоремы через C обозначаются константы, не зависящие от m .

Из оценок (3.25), используя при необходимости подпоследовательности, следует существование функций $\{\widehat{u}_1, \widehat{u}_2\} \in U_{ad}$, $\widehat{\theta} \in L^2(0, T; V)$, $g \in L^2(0, T; V)$, $\widehat{\varphi} \in L^2(0, T; V)$ такие, что имеют место следующие слабые сходимости:

$$u_{jm} \rightarrow \widehat{u}_j \text{ слабо в } L^2(0, T; H), \theta_m, \varphi_m \rightarrow \widehat{\theta}, \widehat{\varphi} \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \quad (3.26)$$

$$h(\theta_m) \rightarrow g \text{ слабо в } L^2(0, T; V).$$

Получим оценку, гарантирующую компактность последовательности θ_m в $L^2(Q)$. Умножим первое уравнение в (3.24) на $\zeta = \theta_m(t) - \theta_m(s)$, проинтегрируем его по $t \in (s, s + \delta)$, а затем еще раз проинтегрируем результат по $s \in (0, T - \delta)$, предполагая, что $\delta > 0$ достаточно мало. В результате получаем

$$\frac{1}{2} \int_0^{T-\delta} \|\sqrt{a}(\theta_m(s + \delta) - \theta_m(s))\|^2 ds = \int_0^{T-\delta} \int_s^{s+\delta} c_m(t, s) dt ds,$$

где

$$c_m(t, s) \leq C (1 + \|\theta_m(t)\|_V^2 + \|\theta_m(s)\|_V^2).$$

Для оценки интегралов от слагаемых, зависящих от t , достаточно изменить порядок интегрирования. Используя ограниченность последовательности θ_m в $L^2(0, T; V)$, получаем следующую оценку равномерной непрерывности:

$$\int_0^{T-\delta} \|\theta_m(s + \delta) - \theta_m(s)\|^2 ds \leq C\delta. \quad (3.27)$$

Из оценки (3.27), используя при необходимости подпоследовательности, получаем, что $\theta_m \rightarrow \widehat{\theta}$ в $L^2(Q)$. Следовательно, в силу неравенства $|h(\theta_m) - h(\widehat{\theta})| \leq k_1 |\theta_m - \widehat{\theta}|$, заключаем, что $h(\theta_m) \rightarrow h(\widehat{\theta})$ в $L^2(Q)$ и следовательно $g = h(\widehat{\theta})$. Также учитываем, что $|\theta_m^4 - \widehat{\theta}^4| \leq C |\theta_m - \widehat{\theta}|$.

При этом предельная функция $\widehat{\theta}$ удовлетворяет неравенству $\theta|_{G_c} \leq \theta_c$. Полученные оценки и результаты сходимости позволяют перейти к пределу в (3.24) и получить, что пара \widehat{y}, \widehat{u} , где $\widehat{y} = \{\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}\}$, $\widehat{u} = \{\widehat{u}_1, \widehat{u}_2\}$ является допустимой для задачи (OC). Поскольку целевой функционал слабо полунепрерывен снизу, пара \widehat{y}, \widehat{u} является решением задачи (OC).

3.2.3 Доказательство сходимости итерационного алгоритма

Для численного решения задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями $\theta|_{G_c} \leq \theta_c$ рассмотрим следующую задачу со штрафом.

Задача (P_ε)

$$J_\varepsilon(\theta, \varphi, u) = J(\theta, \varphi, u) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_c} f(\theta) dx dt \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0, \quad u \in U_{ad}.$$

Здесь,

$$f(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq \theta_c; \\ (\theta - \theta_c)^2, & \text{если } \theta > \theta_c. \end{cases}$$

Аналогично доказательству Теоремы 10 можно установить разрешимость задачи со штрафом P_ε .

Теорема 11. Пусть выполняются условия (d1) – (d3) и (j) – (jj). Тогда решение задачи (P_ε) существует.

Далее исследуются аппроксимационные свойства приближения решения задачи со штрафом.

Теорема 12. Пусть выполнены условия (d1) – (d3) и (j) – (jj) и $M_0 \leq \theta_c$ п.в. в G . Если $\{\theta_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ является решением задачи (P_ε) при $\varepsilon > 0$, то существует последовательность $\varepsilon \rightarrow +0$ такая, что

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon, \varphi_\varepsilon &\rightarrow \widehat{\theta}, \widehat{\varphi} \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \text{ сильно в } L^2(0, T; H), \\ u_\varepsilon &\rightarrow \widehat{u} \text{ слабо в } U, \end{aligned}$$

где $\{\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}, \widehat{u}\}$ является решением Задачи (OC).

Доказательство. Пусть $\{\theta_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ является решением Задачи (P_ε) и $\{\theta, \varphi, u\}$ есть решение Задачи (OC). Тогда,

$$\begin{aligned} a\theta'_\varepsilon + A_1(\theta_\varepsilon) + b([\theta_\varepsilon]^4 - \varphi_\varepsilon) &= f_b + C_\theta u_{\varepsilon 1}, \\ \theta_\varepsilon(0) = \theta_0; \quad A_2\varphi_\varepsilon + \beta(\varphi_\varepsilon - [\theta_\varepsilon]^4) &= C_\varphi u_{\varepsilon 2}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Поскольку $\theta|_{G_c} \leq \theta_c$, верно следующее неравенство:

$$J(\theta_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_c} f(\theta_\varepsilon) dx dt \leq J(\theta, \varphi, u).$$

Следовательно,

$$J(\theta_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J(\theta, \varphi, u),$$

$$\int_0^T \int_{G_c} f(\theta_\varepsilon) dx dt \leq \varepsilon J(\theta, \varphi, u).$$

Аналогично, как и при доказательстве Теоремы 10, выводим оценки

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(Q)} \leq C, \quad \int_0^{T-\delta} \|\theta_\varepsilon(s+\delta) - \theta_\varepsilon(s)\|^2 ds \leq C\delta, \quad (3.29)$$

$$\|\theta_\varepsilon\|_{L^\infty(Q)} \leq C, \quad \|\theta_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)} \leq C.$$

Здесь $C > 0$ обозначает константы, не зависящие от ε .

Из полученных оценок, используя при необходимости подпоследовательности при $\varepsilon \rightarrow +0$, следует существование функций $\hat{u} \in U_{ad}$, $\hat{\theta} \in L^2(0, T; V)$, $\hat{\varphi} \in L^2(0, T; V)$ таких, что

$$\theta_\varepsilon, \varphi_\varepsilon \rightarrow \hat{\theta}, \hat{\varphi} \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \quad (3.30)$$

$$\text{сильно в } L^2(0, T; H), \quad u_\varepsilon \rightarrow \hat{u} \text{ слабо в } U.$$

Отметим важный факт, гарантирующий, что $f(\hat{\theta}) = 0$ и $\hat{\theta}|_{G_c} \leq \theta_c$:

$$\int_0^T \int_{G_c} f(\theta_\varepsilon) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{G_c} f(\hat{\theta}) dx dt$$

и

$$\int_0^T \int_{G_c} f(\theta_\varepsilon) dx dt \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0.$$

Приведенных результатов сходимости достаточно, чтобы перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ в системе (3.21)–(3.22) и доказать, что тройка функции $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ является допустимой для Задачи (ОС). Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу, то тройка $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ является решением Задачи (ОС).

3.2.4 Реализация итерационного алгоритма

Построим итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления (P_ε) для случая, когда

$$U_{ad} = \{u = \{u_1, u_2\} : u_{1,2} \in \mathbb{R}, u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}.$$

Пусть требуется обеспечить температурное поле близкое к заданному распределению θ_d в некоторой подобласти G_d при выполнении ограничения на температуру в подобласти G_c . Для решения данной задачи применим итерационный алгоритм, на каждом шаге которого будет находиться минимум следующего линейно-квадратичного функционала::

$$\widehat{J}_\varepsilon(\theta) = \int_0^T \int_{G_d} (\theta - \theta_d)^2 dx dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\widehat{\theta} > \theta_c} (\theta - \theta_c)^2 dx dt \rightarrow \inf, \quad u \in U_{ad}, \quad (3.31)$$

с ограничениями

$$\begin{aligned} a\partial\theta/\partial t - \nabla \cdot (k(\widehat{\theta})\nabla\theta) + b(|\widehat{\theta}|^3\theta - \varphi) &= C_\theta u_1, \\ -\nabla \cdot (\alpha\nabla\varphi) + \beta(\varphi - |\widehat{\theta}|^3\widehat{\theta}) &= C_\varphi u_2, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$k(\widehat{\theta})\partial_n\theta + \lambda(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + 0.5\varphi|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (3.33)$$

Функция $\widehat{\theta}$ описывает температурное поле, найденное на предыдущей итерации.

Задача (3.31)–(3.33) сводится к нахождению минимума квадратичной функции по параметрам u_1 и u_2 :

$$\widehat{J}_\varepsilon(u_1\Theta_1 + u_2\Theta_2 + \Theta_3) \rightarrow \inf$$

в треугольнике $\{u_1, u_2 \in \mathbb{R} : u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}$. Функции Θ_1 , Θ_2 и Θ_3 вычисляются как решения следующих линейных начально-краевых задач для $x \in G$, $0 < t < T$:

$$\begin{aligned} a\partial\Theta_1/\partial t - \nabla \cdot (k(\widehat{\theta})\nabla\Theta_1) + b|\widehat{\theta}|^3\Theta_1 &= C_\theta, \\ k(\widehat{\theta})\partial_n\Theta_1 + \lambda\Theta_1|_\Gamma &= 0, \quad \Theta_1|_{t=0} = 0; \\ a\partial\Theta_2/\partial t - \nabla \cdot (k(\widehat{\theta})\nabla\Theta_2) + b|\widehat{\theta}|^3\Theta_2 &= b\varphi_2, \\ k(\widehat{\theta})\partial_n\Theta_2 + \lambda\Theta_2|_\Gamma &= 0, \quad \Theta_2|_{t=0} = 0; \\ a\partial\Theta_3/\partial t - \nabla \cdot (k(\widehat{\theta})\nabla\Theta_3) + b|\widehat{\theta}|^3\Theta_3 &= b\varphi_3, \\ k(\widehat{\theta})\partial_n\Theta_3 + \lambda\Theta_3|_\Gamma &= \lambda\theta_b, \quad \Theta_3|_{t=0} = \theta_0. \end{aligned}$$

Здесь φ_2, φ_3 — решения следующих линейных краевых задач:

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla \varphi_2) + \beta \varphi_2 = C_\varphi, \quad \alpha \partial_n \varphi_2 + 0.5 \varphi_2|_\Gamma = 0,$$

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla \varphi_3) + \beta \varphi_3 = \beta \hat{\theta}^4, \quad \alpha \partial_n \varphi_3 + 0.5 \varphi_3|_\Gamma = 0.$$

Для демонстрации сходимости итерационного алгоритма в качестве функции θ_d было взято решение начально-краевой задачи, соответствующее $(u_1, u_2) = (3, 7)$ (здесь и далее единицы в Вт) была выбрана функция θ_d . Области G_d и G_c выбраны как достаточно малые окрестности точек $(1.5, 10)$, $(3.5, 10)$. Для реализации итерационного алгоритма было взято $\varepsilon = 0.3$ и $\theta_c = 47^\circ\text{C}$, и начальное приближение $(u_1, u_2) = (7, 3)\text{Вт}$.

Аппроксимации решения в точке $(1.5, 10)$ по результатам трех итераций алгоритма показаны на рис. 3.2. Первые три пары (u_1, u_2) управления: $(2.73, 10.74)$, $(3.11, 7.23)$, $(3.44, 5.55)$ Максимальное значение температуры в точке на третьей итерации $(3.5, 10)$ равно $50,3^\circ\text{C}$. Отметим, что при $(u_1, u_2) = (3, 7)$ максимальное значение температуры в точке $(3.5, 10)$ равно $50,4^\circ\text{C}$. Таким образом, использование предложенного алгоритма позволило

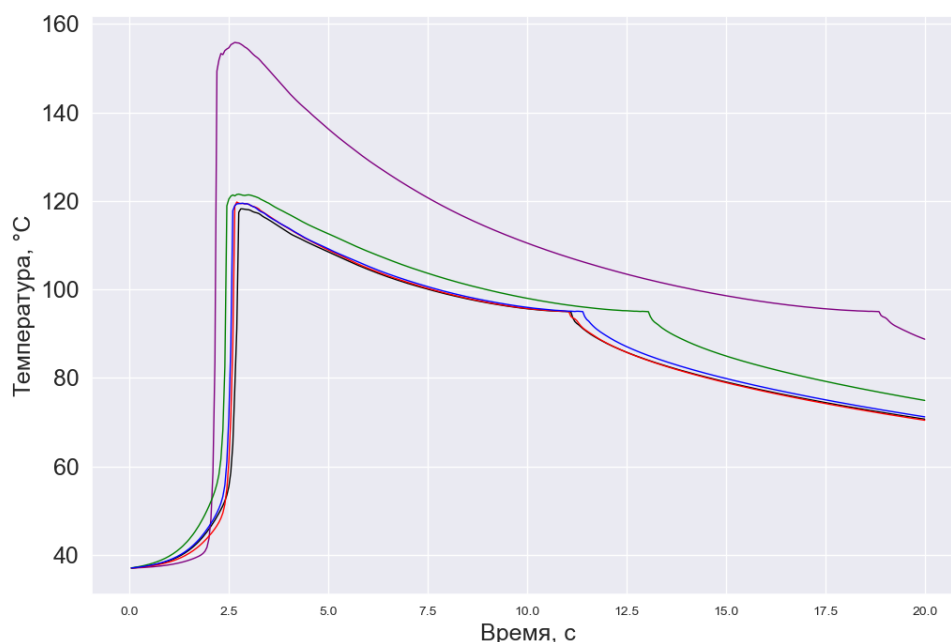


Рисунок 3.2 — Температурные профили в точке $(1.5, 10)$: искомая температура (черный), начальное приближение (фиолетовый), аппроксимация решения на 1-м шаге (зеленый), аппроксимация решения на 2-м шаге (синий), аппроксимация решения на 3-м шаге (красный).

уменьшить температуру в перивенозной ткани, при этом поведение температурного профиля в точке наблюдения (1.5, 10) оказалось близко к желаемому значению θ_d .

Глава 4. Комплекс программ моделирования процесса внутривенной лазерной абляции и вычислительные эксперименты

Для проведения вычислительных экспериментов на основе разработанных вычислительных алгоритмов, представленных во второй и третьей главах диссертационной работы, и комплексного исследования процесса ВВЛА требуются проектирование и программная реализация прикладных программ.

Вычислять решения дифференциальных задач можно с помощью Mathematica, Maple и MATLAB, которые в общем случае позволяют избежать трудоемких процедур программирования. Эти пакеты являются проприетарным программным обеспечением. Поэтому мы руководствовались в первую очередь наличием лицензии свободного программного обеспечением.

В настоящей главе представлены результаты разработки системы компьютерного моделирования ВВЛА на основе метода конечных элементов. Представленные результаты опубликованы в работах автора [52—55, 57, 58, 60—63]. Разработанные прикладные программы подтверждены свидетельствами об официальных регистрациях программ для ЭВМ [70—72]

4.1 Описание, назначение и структура программного комплекса

Для программной реализации вычислительных алгоритмов, описанных в главе 3 и 4, выбран пакет FreeFEM++ [68], предназначенный для решения уравнений в частных производных с использованием метода конечных элементов. К основным достоинствам пакета FreeFEM++ можно отнести простоту решения уравнений в частных производных и возможность визуализировать сетку конечных элементов и решение. Программа дополнена модулем на языке Python, формирующим графическое окно для ввода параметров задачи.

Использование программы позволяет подобрать оптимальные параметры процесса ВВЛА (длина волны лазера, мощность лазера, скорость движения оптоволокну, чернота наконечника оптоволокну), обеспечивающие эффективность и безопасность процедуры внутривенной лазерной абляции.

Данный модуль строит температурный профиль на графике.

Для управления режимами работы разработан пользовательский интерфейс с возможностью настройки параметров вычислительных экспериментов и графического представления полученных данных. Интерфейс системы компьютерного моделирования ориентирован на расчет и визуализацию температурных профилей в различных режимах:

- распределение температуры при проведении внутривенной лазерной абляции;
- расчет оптимальных параметров для проведения внутривенной лазерной абляции;
- расчет оптимальных параметров для проведения внутривенной лазерной абляции с учетом излучения черного тела.

Приведем описание программного обеспечения решаемых научных задач (согласно стандартной спецификации требований). Формализованное описание функций и ограничений разработанных программ представлено ниже.

1. *Название задачи и системные требования.* Название комплекса программ – «Комплекс программ моделирования внутривенной лазерной абляции».

Наименование программных модулей:

1.1. Программа «Нахождение решения начально-краевой задачи для модели внутривенной лазерной абляции»

1.2. Программа «Решение задачи оптимального управления для модели внутривенной лазерной абляции при фазовом ограничении»

1.3. Программа «Решение обратной экстремальной задачи для нелинейной модели сложного теплообмена»

Рекомендуемые системные требования:

операционная система: 64-битная x86, 32-битная x86; MacOS - 64-битная x86; Linux - 64-битная x86;

процессор: любой процессор Intel или AMD, поддерживающий набор инструкций SSE, не менее двух ядер;

оперативная память: не менее 3 ГБ;

Свободное место на жестком диске: 1.5 ГБ для FreeFEM++, 6-7 ГБ для IDE языка программирования Python.

Программное обеспечение - Anaconda3 с лицензией BSD

2. *Описание.* Комплекс имеет модульную структуру.

Программный модуль 1. Программа предназначена для нахождения решения начально-краевой задачи для квазилинейной модели внутривенной лазерной

абляции, представляющей собой $P1$ -приближение системы уравнений сложного (радиационно-кондуктивного) теплообмена. Нелинейность модели вызвана учетом внутреннего теплового излучения и зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры. Для нахождения решения начально-краевой задачи используется итерационный алгоритм. Нахождение приближения решения на каждом шаге итерационного алгоритма осуществляется с помощью метода конечных элементов с использованием пакета FreeFEM++. Программа позволяет найти распределение температуры и интенсивности излучения внутри вены и в окружающей ткани. Использование программы позволяет подобрать оптимальные параметры процесса (длина волны лазера, мощность лазера, скорость движения оптоволокну, чернота наконечника оптоволокну), обеспечивающие эффективность и безопасность процедуры внутривенной лазерной абляции. Программа дополнена модулем на языке Python, формирующим графическое окно для ввода параметров задачи. Программа может быть использована для предварительного подбора характеристик излучения при проведении процедуры внутривенной лазерной абляции. Подробная математическая постановка задачи моделирования и алгоритм ее реализации описаны в разделе 2.1.

Программный модуль 2. Программа позволяет найти приближение решения задачи оптимального управления для квазилинейной модели внутривенной лазерной абляции, представляющей собой $P1$ -приближение системы уравнений радиационного и кондуктивного теплообмена. Требуется подобрать характеристики излучения, обеспечивающие приближение температурного профиля в точке наблюдения к заданному, при этом в некоторой контрольной точке температура не должна превышать выбранного критического значения. В качестве управления берутся мощности источника, идущие на излучение и на нагрев наконечника оптоволокну. Для нахождения решения задачи оптимального управления используется метод штрафных функций, который реализуется с помощью итерационного алгоритма. Нахождение приближения решения задачи на каждом шаге итерационного алгоритма осуществляется с помощью метода конечных элементов в пакете FreeFEM++. Подробная математическая постановка задачи моделирования и алгоритм ее реализации описаны в разделе 3.1.

Программный модуль 3. Программа предназначена для нахождения решения обратной экстремальной задачи для квазилинейных уравнений сложного теплообмена, моделирующих процесс внутривенной лазерной абляции. Требуется определить характеристики излучения, обеспечивающие распределение

температуры в заданной подобласти, близкое к желаемому, при этом должно выполняться ограничение на температуру в некоторой контрольной подобласти. Модель учитывает поступление тепловой энергии за счет различных механизмов: кондуктивный перенос тепла, выделение тепла за счет поглощения лазерного излучения, излучение черного тела и перенос тепла потоком пузырьков, образующихся на наконечнике оптоволоконка. Ввиду нелинейности задачи, для нахождения решения задачи оптимального управления используется итерационный алгоритм. Нахождение приближения решения на каждом шаге итерационного алгоритма осуществляется с помощью метода конечных элементов в пакете FreeFEM++. Графический интерфейс программы выполнен на языке Python, который дает возможность изменять входные параметры программы. Подробная математическая постановка задачи моделирования и алгоритм ее реализации описаны в разделе 3.2.

3. *Входные данные.*

3.1. Входные данные для программного модуля «Нахождение решения начально-краевой задачи для модели внутривенной лазерной абляции»:

Мощность источника, Вт;

Мощность, идущая на нагрев наконечника оптоволоконка, %;

Мощность, идущая на излучение, %;

Длина волны лазерного излучения: 810, 840, 940, 980, 1064, 1320, 1470, 1950 нм.

3.2. Входные данные для программного модуля «Решение задачи оптимального управления для модели внутривенной лазерной абляции при фазовом ограничении»:

Мощность, идущая на нагрев наконечника оптоволоконка, Вт;

Мощность, идущая на излучение, Вт;

Ограничение по количеству итераций;

Длина волны лазерного излучения: 810, 840, 940, 980, 1064, 1320, 1470, 1950 нм;

Точка контроля температуры;

Ограничение температуры в точке контроля, °С;

Скорость движения оптоволоконка, мм/с;

Штрафной коэффициент;

Выбор температурных профилей для отображения.

3.3. Входные данные для программного модуля «Решение обратной экстремальной задачи для нелинейной модели сложного теплообмена»:

Мощность, идущая на нагрев наконечника оптоволоконна, Вт;

Мощность, идущая на излучение, Вт;

Ограничение по количеству итераций;

Ограничение по относительному изменению целевой функции

Длина волны лазерного излучения: 810, 840, 940, 980, 1064, 1320, 1470, 1950 нм;

Точка контроля температуры;

Ограничение температуры в точке контроля, °С;

Скорость движения оптоволоконна, мм/с;

Штрафной коэффициент;

Выбор температурных профилей для отображения.

4. Выходные данные.

4.1. Для программного модуля «Нахождение решения начально-краевой задачи для модели внутривенной лазерной абляции»: визуализация зависимости температурного профиля в точке на стенке вены от времени при заданных параметрах.

4.2. Для программного модуля «Решение задачи оптимального управления для модели внутривенной лазерной абляции при фазовом ограничении»: визуализация зависимости температурных профилей в точке на стенке вены от времени при заданных параметрах с возможностью выбора отображения профилей: начального и конечного, а также вывод итогового распределения и максимальной температуры в точке контроля.

4.3. Для программного модуля «Решение обратной экстремальной задачи для нелинейной модели сложного теплообмена»: визуализация зависимости температурных профилей в точке на стенке вены и в точке контроля температуры от времени при заданных параметрах с возможностью выбора отображения профилей: начального, промежуточного и конечного, а также вывод итогового распределения.

5. Структура и режимы работы программного комплекса.

Исходя из задач, предъявляемых к программному комплексу, его структуру можно представить в виде модульной архитектуры, показанной на рисунке 4.1. Функциональные элементы комплекса можно разделить на две основные части: начально-краевая задача и обратная экстремальная задача. В начально-краевой

задаче находится распределение температурного поля при моделировании внутривенной лазерной абляции. В обратной экстремальной задаче требуется найти такое управление, которое бы обеспечивало близкий температурный профиль к заданному и при температурном ограничении в окрестности заданной точке наблюдения.

Комплекс программ обладает дружественным интерфейсом, возможностью гибкой настройки режимов вычислительного эксперимента и необходимым функционалом для решения рассматриваемого класса задач.



Рисунок 4.1 — Общая схема структуры программного комплекса

Отметим, что разработанные программы можно использовать для решения задач из других предметных областей, в рамках сформулированных математических постановок. Система моделирования обладает преимуществом авторского программного обеспечения, поскольку позволяет решать задачи интеграции отдельных модулей, гибкого управления вычислительным процессом и надстройки решателей при модификации математических моделей или вычислительных алгоритмов.

4.2 Вычислительные эксперименты и анализ результатов расчета

В настоящем разделе представлены серия вычислительных экспериментов и анализ результатов расчета (на основе метода конечных элементов) нестационарных задач сложного теплообмена.

4.2.1 Верификация модели ВВЛА

Сравним результаты численного моделирования с аналогом, использованном в [12, 13, 43, 45, 46], в котором интенсивность излучения вычисляется по следующей формуле справедливой для точечного источника с координатами $(0, z_0)$ в бесконечной однородной среде:

$$\varphi = \frac{u_2 \exp(-\mu_e d(r, z))}{4\pi\alpha d(r, z)}, \quad (4.1)$$

где u_2 – мощность источника, идущая на излучение, $\mu_e = \sqrt{\mu_a/\alpha}$, функция $d(r, z)$ описывает расстояние между точками $(0, z_0)$ и (r, z) . Температурные профили для длин волн 810 нм и 1064 нм, полученные на основе модели (1.26–1.29) и модели (1.26), (1.28), (1.29), (4.1), представлены на рисунках 4.2 и 4.3. При удалении от источника излучения температурные профили становятся ближе. Это объясняется значительным уменьшением в этих точках уровня излучения, и соответственно уменьшением вклада от энергии поглощенного излучения в температуру.

4.2.2 Сравнение моделей внутривенной лазерной абляции с учетом и без учета излучения черного тела

Результаты компьютерного моделирования продемонстрируем для длины волны лазерного излучения 810 нм с разным уровнем карбонизации накопника. Схема расчетной области представлена на рисунке 2.1, и состоит из цилиндрического кровеносного сосуда со стенкой и перивенозной тканью длиной

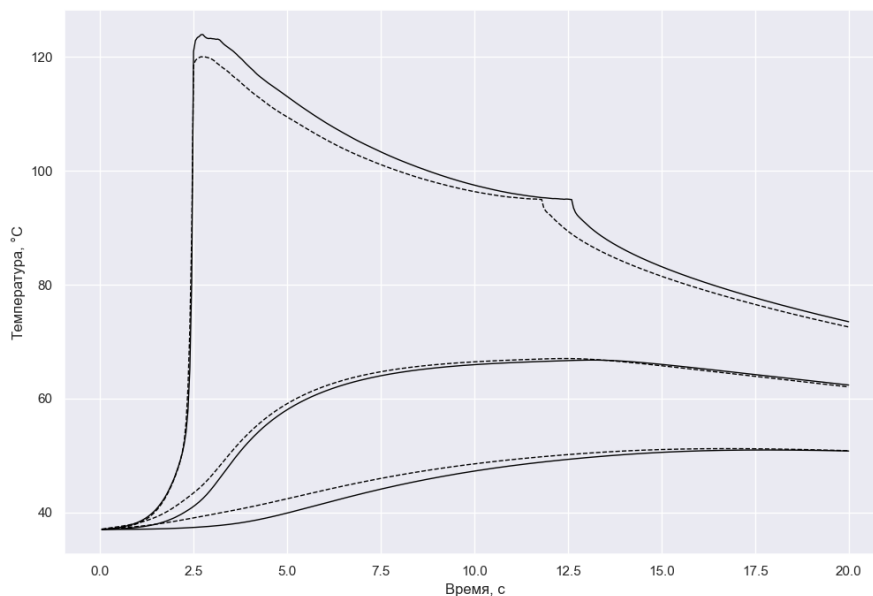


Рисунок 4.2 — Температурные профили для длины волны 810 нм в точках (1.5, 10), (2.5, 10) и (3.5, 10): сплошные линии — модель (1.26–1.29); штриховые линии – упрощенная модель (1.26), (1.28), (1.29), (4.1), основанная на явной формуле интенсивности излучения точечного источника в однородной среде.

50 мм. Наконечник оптоволоконна в начальный момент времени расположен в центре сосуда в координатах $(r, z) = (0, 5)$, его радиус составляет 0.3 мм и толщина 0.2 мм. Наконечник движется вверх в осевом направлении z с постоянной скоростью 2 мм/с. В момент времени t центр наконечника оптоволоконна находится в осевом положении $z = 5 + v \cdot t$.

Проведем сравнение ррешений начально-краевых задач для моделей ВВЛА с учетом и без учета излучения черного тела.. Температурные профили в точке наблюдения (1.5, 10), находящейся на внутренней стенке вены, представлены на рисунке 4.4):

Поведение температурных профилей подтверждают распространенный тезис, что влияние излучения черного тела незначительно при небольших температурах. Разница в длительности кипения 0.25 с.

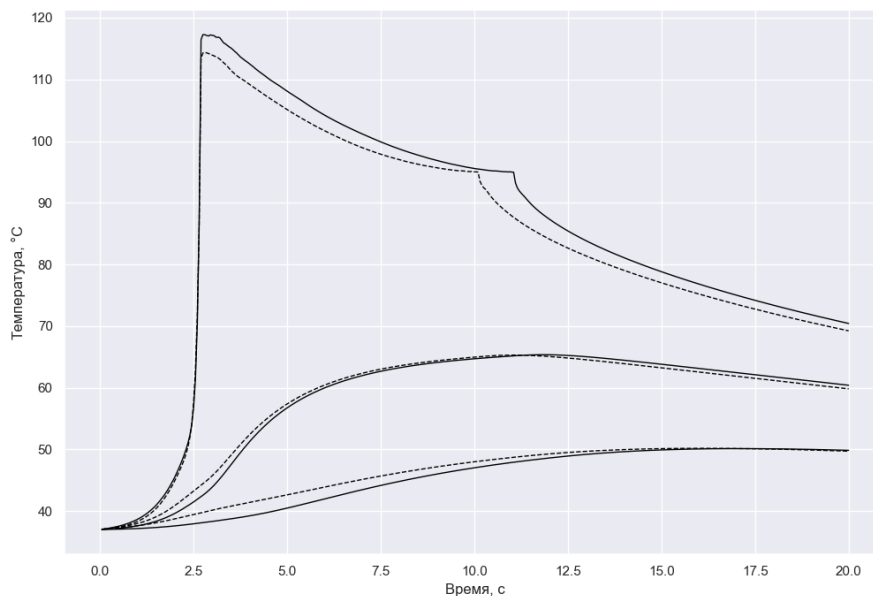


Рисунок 4.3 — Температурные профили для длины волны 1064 нм в точках (1.5, 10), (2.5, 10) и (3.5, 10): сплошные линии — модель (1.26–1.29); штриховые линии — упрощенная модель (1.26), (1.28), (1.29), (4.1), основанная на явной формуле интенсивности излучения точечного источника в однородной среде.

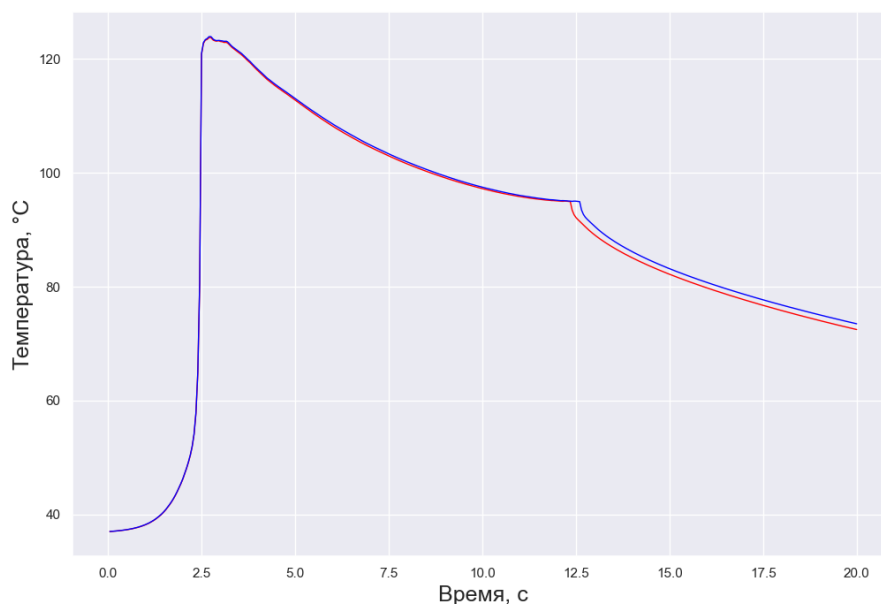


Рисунок 4.4 — Температурные профили в точке (1.5, 10) для мощности лазера 10 Вт, 810 нм: без учета излучения черного тела (синий), с излучением черного (красный).

4.2.3 Внутривенная лазерная абляция на разных длинах волн

Рассмотрим результаты численного моделирования для различных длин волн. Лазерное излучение поступает на конец оптоволоконна попадает с мощностью $P = 10$ Вт, и поскольку 30% поглощается карбонизированным слоем крови, оставшиеся 70% излучаются из в кровь. Точка наблюдения, где мы будем оценивать температурный профиль, находится на внутренней стенке вены в координатах (1.5, 10).

Оптические и теплофизические свойства крови, стенки вены и перивенозной ткани для разных длин волн т. е. теплопроводность, k ; плотность, ρ ; теплоемкость при постоянном давлении, c_p ; коэффициент поглощения μ_a и коэффициент рассеяния μ_s , представлены в таблицах 2 и 3.

Таблица 2 — Оптические параметры

λ (нм)	μ_a , мм^{-1}			μ_s , мм^{-1}		
	Кровь	Стенка вены	Перивенозная ткань	Кровь	Стенка вены	Перивенозная ткань
810	0.21	0.2	0.017	0.73	2.4	1.2
1064	0.12	0.12	0.034	0.58	1.95	0.98
1470	3	2.4	0.35	0.52	1.7	0.84
1950	10	7.5	0.35	0.52	1.7	0.84

Таблица 3 — Теплофизические параметры

	Оптоволоконно	Кровь	Стенка вены и перивенозная ткань
k , Вт/ммК	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$0.6 \cdot 10^{-3}$	$0.56 \cdot 10^{-3}$
ρ , кг/мм ³	$2.4 \cdot 10^{-6}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-6}$
c_p , Дж/кгК	703	4181	3780

С учетом цилиндрической системы координат коэффициент теплопередачи $\lambda = 0$ при $r = 0$. На остальных границах $\lambda = 1$.

В результате получаем следующие температурные профили для длин волн 810, 1064, 1470, 1950 нм при мощности источника 10 Вт, из которых 7 Вт идет на излучение и 3 Вт на нагрев наконечника оптоволоконна (рис. 4.5):

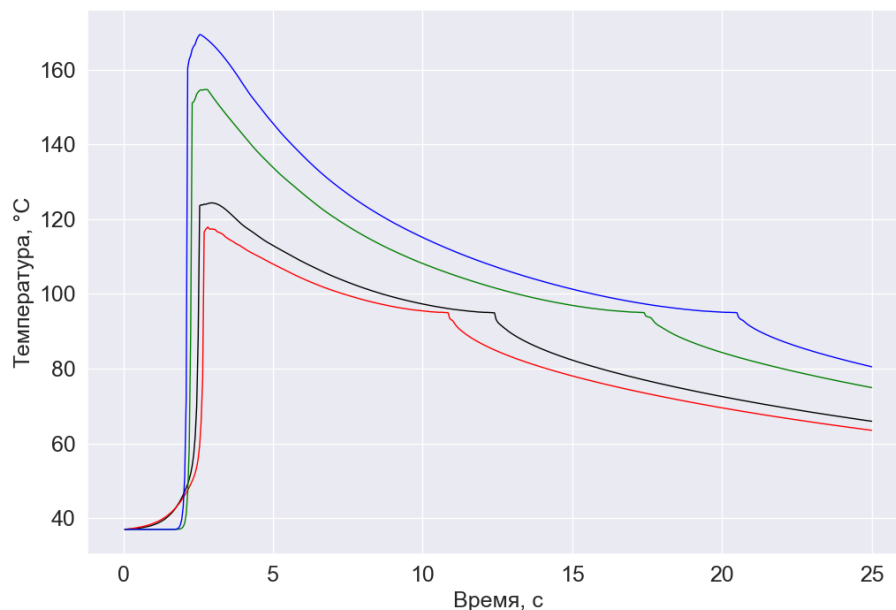


Рисунок 4.5 — Температурные профили в точке (1.5, 10) для мощности лазера 10 Вт и для разных длин волн: 810 нм (черный), 1064 нм (красный), 1470 нм (зеленый) и 1950 нм (синий).

Как видно из рис. 4.5, изменение длины волны излучения существенно влияет на поведение температурного профиля. Тем не менее можно обеспечить достаточно близкую продолжительность кипения (при температуре более 95°C) для профилей температуры, соответствующих разным длинам волн, путем изменения мощности лазера $P = u_1 + u_2$ сохраняя соотношение u_2/u_1 равное 7/3 (см. рис. 4.6).

4.2.4 Влияние черноты наконечника на температурное поле

В следующем примере рассмотрим влияние черноты наконечника оптоволоконного волокна на температурный профиль для длины волны 810 нм, мощность источника излучения $P = 10$ Вт.

Очевидно, что увеличение доли мощности идущей на нагрев наконечника оптоволоконного волокна увеличивает температуру (рис. 4.7). В среднем увеличение мощности на нагрев на 10% приведет к увеличению максимальной температуры на 8.5°C.

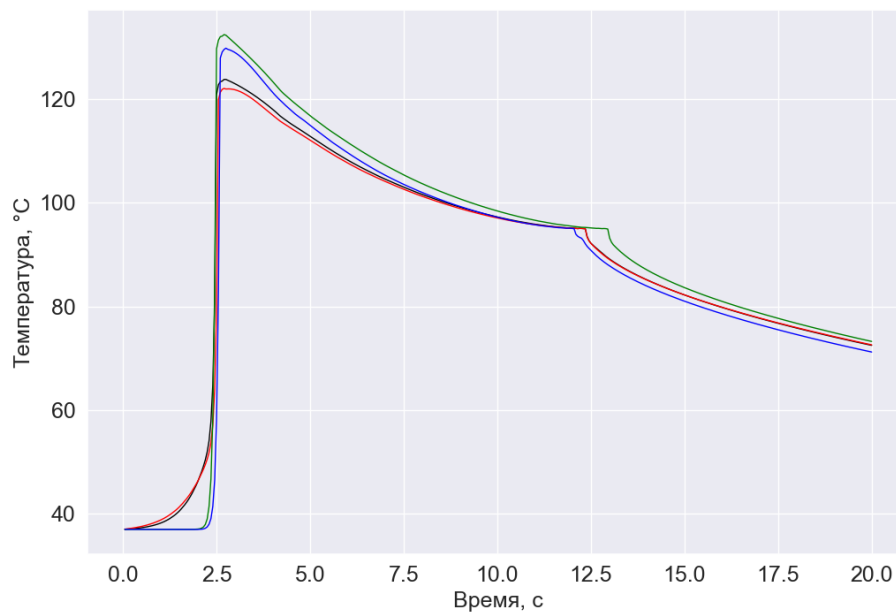


Рисунок 4.6 — Температурные профили в точке (1.5, 10) для разных длин волн и мощностей лазера: 810 нм, $P = 10$ Вт (черный); 1064 нм, $P = 11$ Вт (красный); 1470 нм, $P = 7,5$ Вт (зеленый); 1950 нм, $P = 6$ Вт (синий).

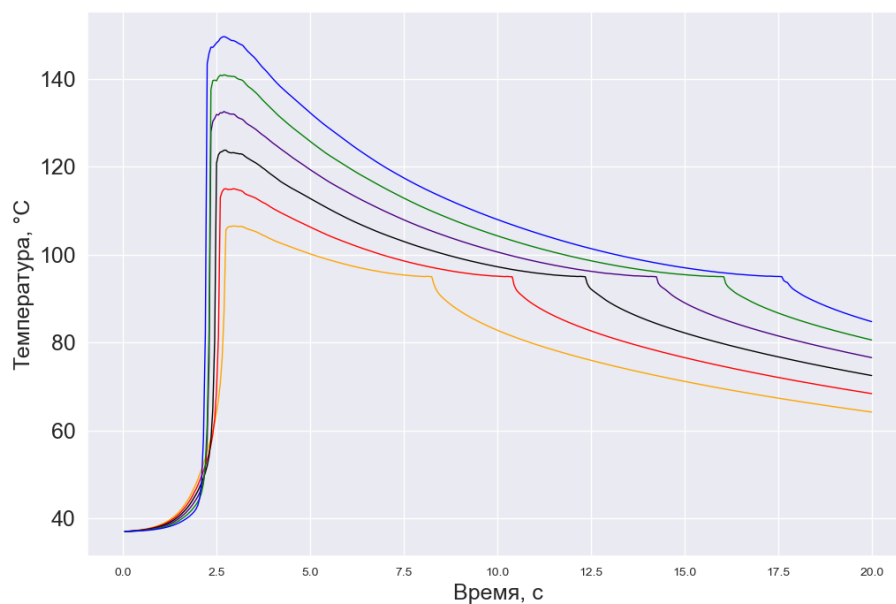


Рисунок 4.7 — Температурные профили в точке (1.5, 10) для длины волны 810 нм при соотношении мощностей, идущих на нагрев наконечника и излучение: 1/9 (оранжевый); 2/8 (красный); 3/7 (черный); 4/6 (фиолетовый); 5/5 (зеленый); 6/4 (синий).

4.2.5 Влияние штрафного коэффициента на сходимость алгоритма решения задачи оптимального управления

Рассмотрим влияние штрафного коэффициента на сходимость алгоритма решения обратной экстремальной задачи для длины волны 810 нм с соотношением мощностей, идущих на нагрев и излучение 3/7. Ограничение на температуру в точке наблюдения (3.5, 10) составляет 47°C. Результаты работы алгоритма представлены в Таблице 4.

Таблица 4 — Результаты

Штрафной коэффициент	0.1	0.3	0.5	0.7
Начальное распределение	(7, 3)	(7, 3)	(7, 3)	(7, 3)
Распределение после 3 итераций	(3.5, 4.03)	(2.25, 8.13)	(1.46, 10.56)	(1.3, 11.09)
Максимальная температура в (3.5, 10)	49.88	50.52	50.80	50.90
Норма отклонения в (1.5, 10)	6522	14038	17401	18540

При увеличении штрафного коэффициента значимость штрафа (отклонение от фазового ограничения) уменьшается, что приводит к снижению скорости сходимости. По результатам трех итераций работы алгоритма лучший результат достигнут при штрафном коэффициенте равным 0.1 (наибольшее влияние штрафа). При этом самая низкая максимальная температура в точке контроля и минимальная норма отклонения от заданного температурного профиля. Температурные профили показаны на рисунках 4.8–4.11.

Проведем еще один вычислительный эксперимент по влиянию штрафного коэффициента на сходимость алгоритма. Выберем длину волны 1064 нм, мощность на нагрев 7Вт, мощность на излучение 3 Вт. Фазовое ограничение в точке контроля (3.5, 10) составляет 47°C. Результаты работы алгоритма представлены в Таблице 5, и соответствующие температурные профили показаны на рисунках 4.12–4.15.

По результатам двух вычислительных экспериментов по выбору оптимальному значению штрафного коэффициента при излучении на длинах волн 810 и 1064 нм, приходим к выводу, что лучшее приближение обеспечивает штрафной коэффициент от 0.1 до 0.3.

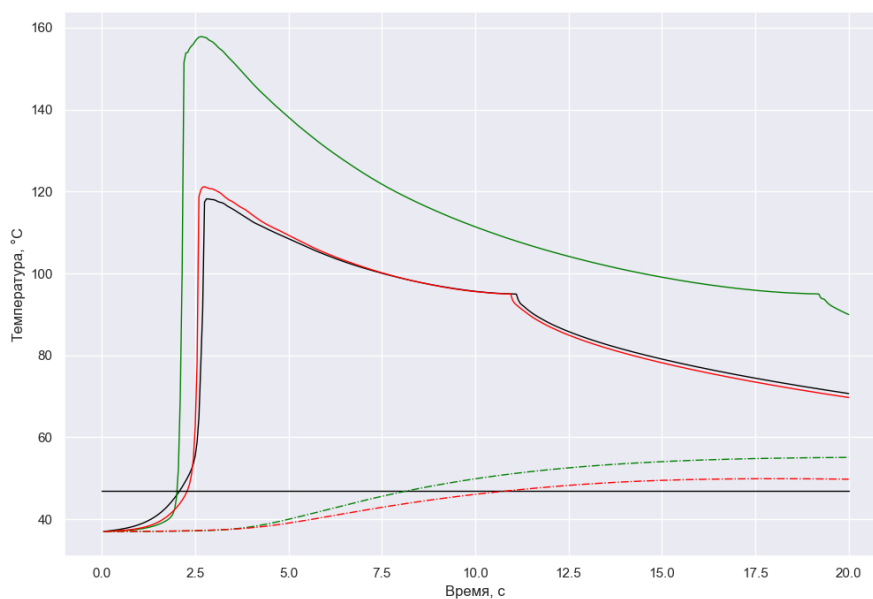


Рисунок 4.8 — Температурные профили при штрафном коэффициенте 0.1 в точках наблюдения: (1.5,10) – сплошные линии, (3.5, 10) – пунктирные линии. Зеленый цвет - начальное приближение, красный - приближение решение на 3-й итерации. Черная вертикальная линия - фазовое ограничение в точке (3.5, 10)

Таблица 5 — Результаты

Штрафной коэффициент	0.1	0.3	0.5	0.7
Начальное распределение	(7, 3)	(7, 3)	(7, 3)	(7, 3)
Распределение после 3 итераций	(4.08, 2.52)	(3.57, 4.99)	(3.22, 6.5)	(3.12, 7)
Максимальная температура в (3.5, 10)	49.69	50.31	50.49	50.59
Квадрат отклонения в (1.5, 10)	4213	3326	5782	5847

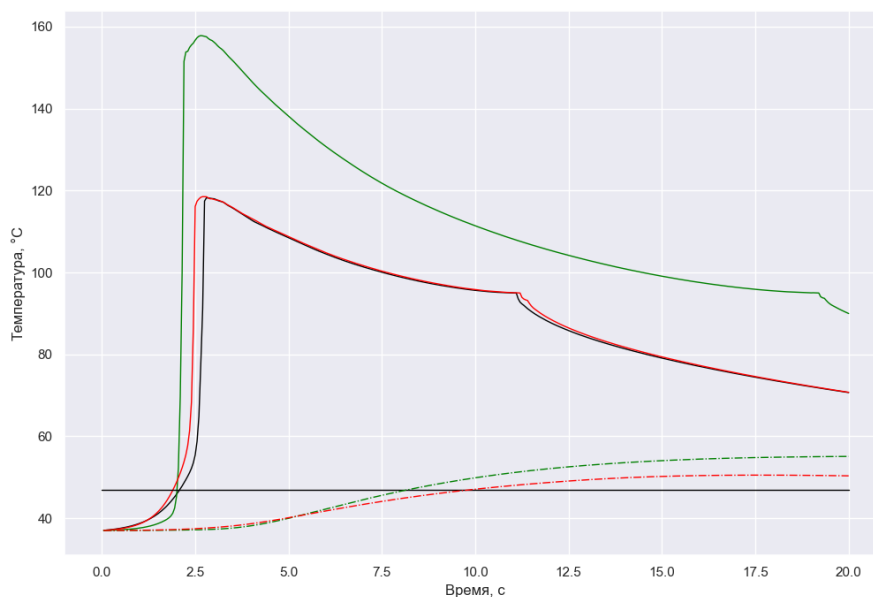


Рисунок 4.9 — Температурные профили при штрафном коэффициенте 0.3 в точках наблюдения: (1.5,10) – сплошные линии, (3.5, 10) – пунктирные линии. Зеленый цвет - начальное приближение, красный - приближение решение на 3-й итерации. Черная вертикальная линия - фазовое ограничение в точке (3.5, 10)

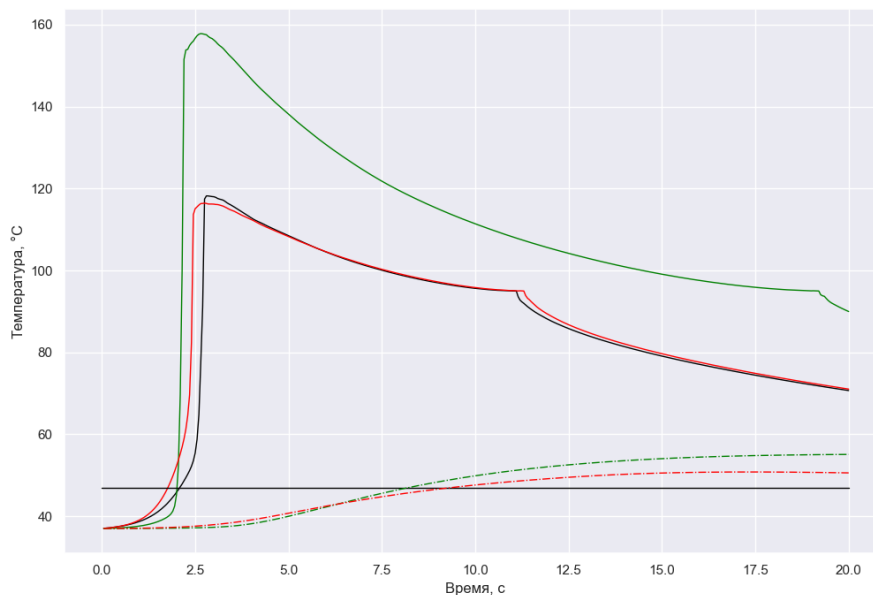


Рисунок 4.10 — Температурные профили при штрафном коэффициенте 0.5 в точках наблюдения: (1.5,10) – сплошные линии, (3.5, 10) – пунктирные линии. Зеленый цвет - начальное приближение, красный - приближение решение на 3-й итерации. Черная вертикальная линия - фазовое ограничение в точке (3.5, 10)

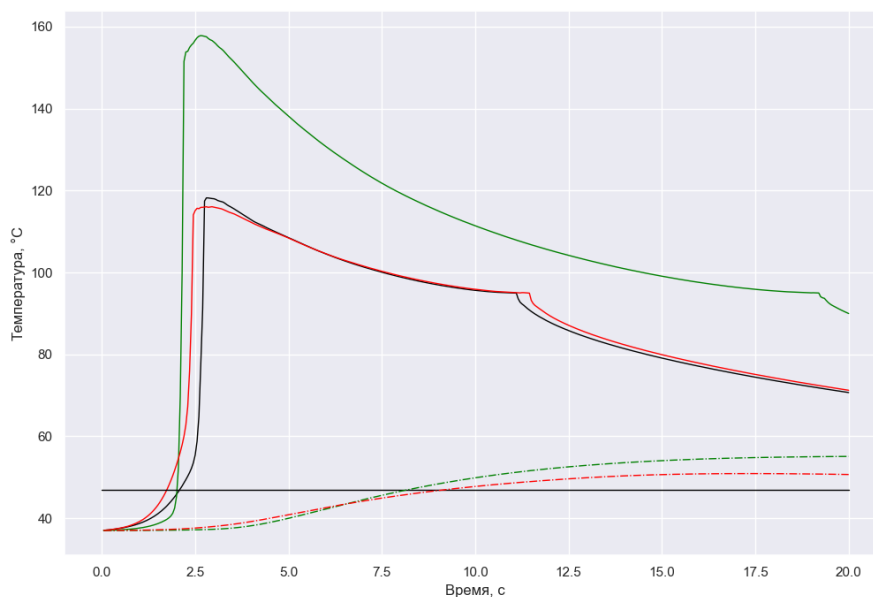


Рисунок 4.11 — Температурные профили при штрафном коэффициенте 0.7 в точках наблюдения: (1.5,10) – сплошные линии, (3.5, 10) – пунктирные линии. Зеленый цвет - начальное приближение, красный - приближение решение на 3-й итерации. Черная вертикальная линия - фазовое ограничение в точке (3.5, 10)

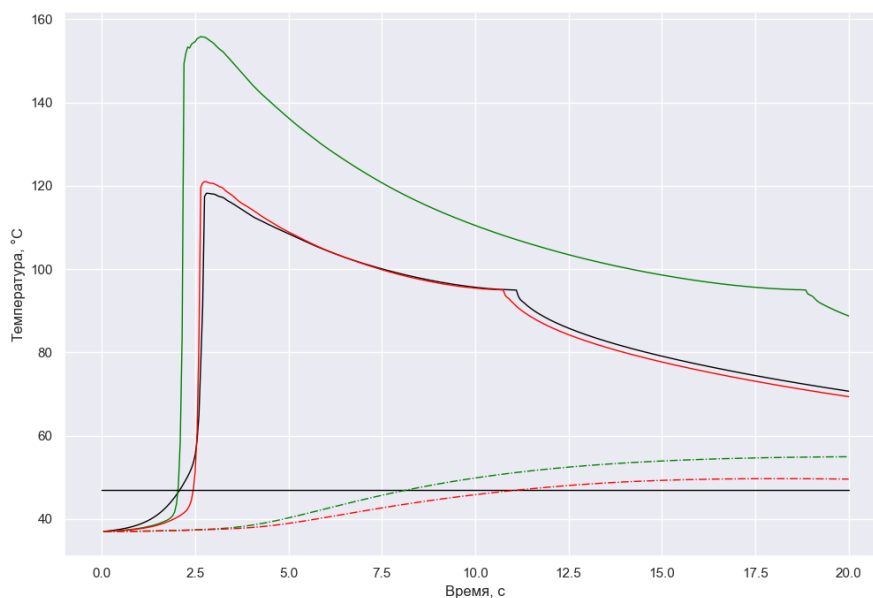


Рисунок 4.12 — Температурные профили при штрафном коэффициенте 0.1 в точках наблюдения: (1.5,10) – сплошные линии, (3.5, 10) – пунктирные линии. Зеленый цвет - начальное приближение, красный - приближение решение на 3-й итерации. Черная вертикальная линия - фазовое ограничение в точке (3.5, 10)

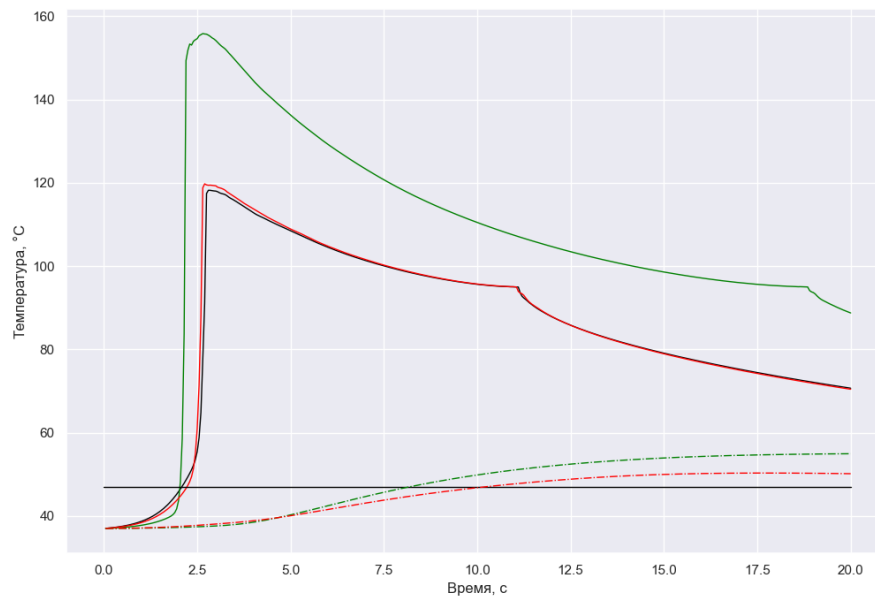


Рисунок 4.13 — Температурные профили при штрафном коэффициенте 0.3 в точках наблюдения: (1.5,10) – сплошные линии, (3.5, 10) – пунктирные линии. Зеленый цвет - начальное приближение, красный - приближение решение на 3-й итерации. Черная вертикальная линия - фазовое ограничение в точке (3.5, 10)

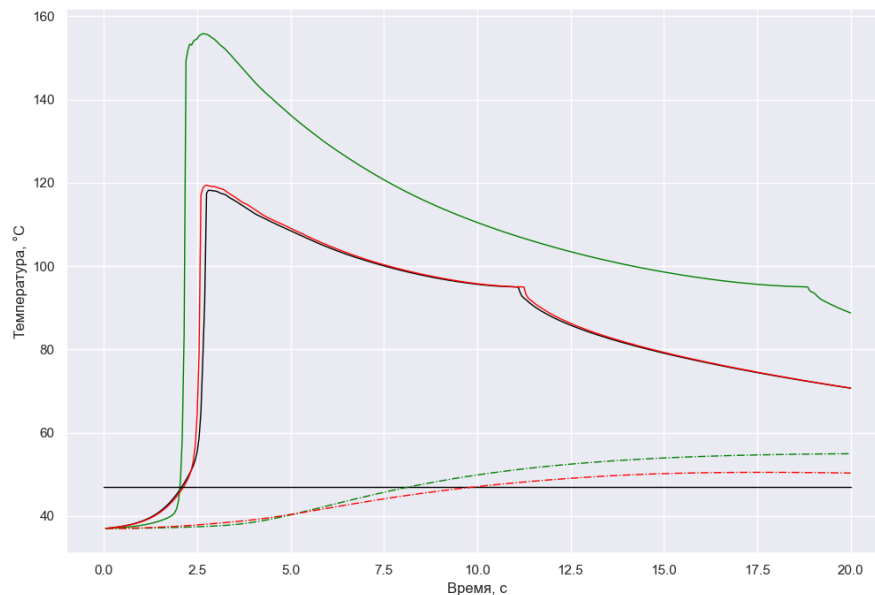


Рисунок 4.14 — Температурные профили при штрафном коэффициенте 0.5 в точках наблюдения: (1.5,10) – сплошные линии, (3.5, 10) – пунктирные линии. Зеленый цвет - начальное приближение, красный - приближение решение на 3-й итерации. Черная вертикальная линия - фазовое ограничение в точке (3.5, 10)

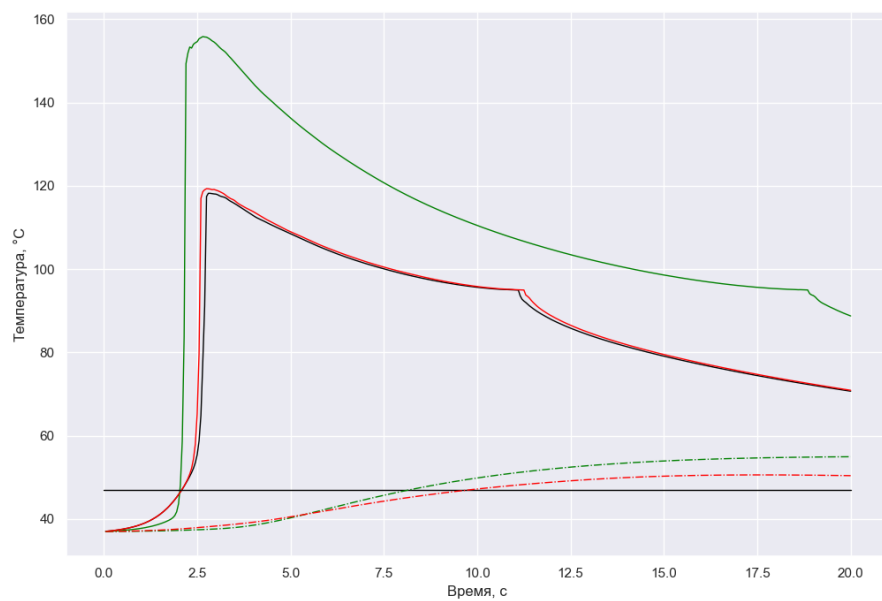


Рисунок 4.15 — Температурные профили при штрафном коэффициенте 0.7 в точках наблюдения: (1.5,10) – сплошные линии, (3.5, 10) – пунктирные линии. Зеленый цвет - начальное приближение, красный - приближение решение на 3-й итерации. Черная вертикальная линия - фазовое ограничение в точке (3.5, 10)

Заключение

В диссертации доказаны существование и единственность решений начально-краевых задач для системы диффузионных уравнений сложного теплообмена. Установлена устойчивость решений, что служит обоснованием адекватности диффузионной модели. Таким образом, получены важные с теоретической точки зрения результаты, которые могут быть полезны при дальнейшем использовании моделей сложного теплообмена и анализе обратных задач в рамках моделей сложного теплообмена. Развитые методы исследования начально-краевых задач могут применяться для изучения различных моделей, описываемых нелинейными уравнениями со сходной структурой.

Построены эффективные численные алгоритмы решения начально-краевых задач и задач оптимального уравнения сложного теплообмена. Эти алгоритмы могут использоваться для выбора оптимальных параметров излучения, обеспечивающих эффективное и безопасное проведение ВВЛА.

Разработан комплекс программ для проведения вычислительных экспериментов. Разработка общего решателя краевых задач методом конечных элементов может быть продолжена, чтобы охватить более широкий круг решаемых задач.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Ковтанюку А.Е. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит Чеботарева А. Ю. и Бризицкого Р. В. за всю возможную помощь. Автор также благодарит много разных людей и всех, кто сделал настоящую работу автора возможной.

Список литературы

1. Математические модели лазерной коррекции миопии методами ЛАСИК , SMILE и ФРК / С. М. Байэр [et al.] // Российский журнал биомеханики. — 2021. — Vol. 25, no. 4. — P. 369—375.
2. *Jiao, J.* Thermal interaction of short-pulsed laser focused beams with skin tissues / J. Jiao, Z. Guo // *Physics in Medicine Biology*. — 2009. — June. — Vol. 54, no. 13. — P. 4225.
3. *Fasano, A.* On a mathematical model for laser-induced thermotherapy / A. Fasano, D. Hömberg, D. Naumov // *Applied Mathematical Modelling*. — 2010. — Vol. 34, no. 12. — P. 3831—3840.
4. *Kidney Tumors Laser Ablation* / S. Sartori [et al.] // *Image-guided Laser Ablation*. — Springer International Publishing, 2020. — P. 55—60.
5. Современные методы абляции злокачественных новообразований печени / Л. И. Москвичева [и др.] // *Research'n Practical Medicine Journal*. — 2018. — Т. 5, № 4. — С. 58—71.
6. CT-guided percutaneous laser ablation of metastatic lung cancer: three cases report and literature review / Q. Zhao [et al.] // *Oncotarget*. — 2017. — Vol. 8, no. 2. — P. 2187—2196.
7. *Patel, B.* Laser Interstitial Thermal Therapy / B. Patel, A. H. Kim // *Missouri medicine*. — 2020. — Vol. 117, no. 1. — P. 50—55.
8. *Bone, C.* Tratamiento endoluminal de las varices con laser de diodo: estudio preliminary / C. Bone // *Rev Patol Vasc*. — 1999. — Vol. 5. — P. 35—46.
9. *Beale, R. J.* Minimally invasive treatment for varicose veins: a review of endovenous laser treatment and radiofrequency ablation / R. J. Beale, A. I. D. Mavor, M. J. Gough // *The international journal of lower extremity wounds*. — 2004. — Vol. 3, no. 4. — P. 188—197.
10. *Morrison, N.* Saphenous ablation: what are the choices, laser or RF energy / N. Morrison // *Seminars in vascular surgery*. — 2005. — Vol. 18, no. 1. — P. 15—18.

11. Review of Endovenous Thermal Ablation of the Great Saphenous Vein: Endovenous Laser Therapy Versus Radiofrequency Ablation / O. Ahadiat [et al.] // *Dermatologic Surgery*. — 2018. — Vol. 44, no. 5. — P. 679—688.
12. Temperature profiles of 980- and 1,470-nm endovenous laser ablation, endovenous radiofrequency ablation and endovenous steam ablation / W. S. J. Malskat [et al.] // *Lasers in medical science*. — 2014. — Vol. 29, no. 2. — P. 423—429.
13. *Mordon, S.* Mathematical modeling of endovenous laser treatment (EVLT) / S. Mordon, B. Wassmer, J. Zemmouri // *Biomedical engineering online*. — 2006. — Vol. 5, no. 26.
14. *Тучин, В. В.* Оптика биологических тканей. Методы рассеяния света в медицинской диагностике / В. В. Тучин. — Перевод с англ. под ред. В.В. Тучина. — М. : Физматлит, 2013. — 812 с.
15. *Krasnikov, I. V.* Simulation of the effect of photoprotective titanium dioxide (TiO₂) and zinc oxide (ZnO) nanoparticles on the thermal response and optical characteristics of skin / I. V. Krasnikov, A. Y. Seteikin, A. P. Popov // *Optics and Spectroscopy*. — 2015. — Vol. 118, no. 4. — P. 668—673.
16. *Kovtanyuk, A. E.* The use of the diffusion approximation for simulating radiation and thermal processes in the skin / A. E. Kovtanyuk, G. V. Grenkin, A. Y. Chebotarev // *Optics and Spectroscopy*. — 2017. — Vol. 123, no. 2. — P. 205—210.
17. *Прохоров, И. В.* Исследование задач оптической томографии методами теории переноса излучения / И. В. Прохоров, И. П. Яровенко // *Оптика и спектроскопия*. — 2006. — Т. 101, № 5. — С. 817—824.
18. *Яровенко, И. П.* Определение показателей преломления слоистой среды при импульсном режиме облучения / И. П. Яровенко, И. В. Прохоров // *Оптика и спектроскопия*. — 2018. — Т. 124, № 4. — С. 534—541.
19. *Сетейкин, А.* Анализ по методу Монте-Карло процессов распространения лазерного излучения в многослойных биоматериалах / А. Сетейкин // *Оптика и спектроскопия*. — 2005. — Т. 99, № 4. — С. 685—689.
20. *Amosov, A. A.* Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative - Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies / A. A. Amosov // *Russian Journal of Mathematical Physics*. — 2016. — Vol. 23. — P. 309—334.

21. *Амосов, А. А.* Стационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения / А. А. Амосов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2017. — Т. 57, № 3. — С. 510—535.
22. *Amosov, A. A.* Nonstationary Problem of Complex Heat Transfer in a System of Semitransparent Bodies with Boundary-Value Conditions of Diffuse Reflection and Refraction of Radiation / A. A. Amosov // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 233. — P. 777—806.
23. *Chebotarev, A. Y.* Quasi-static diffusion model of complex heat transfer with reflection and refraction conditions / A. Y. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2022. — Т. 507, № 1. — С. 125745.
24. *Amosov, A. A.* Boundary value problem for the radiation transfer equation with reflection and refraction conditions / A. A. Amosov // Journal of Mathematical Sciences. — 2013. — Vol. 191. — P. 101—149.
25. *Amosov, A. A.* Boundary Value Problem for the Radiation Transfer Equation with Diffuse Reflection and Refraction Conditions / A. A. Amosov // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 193. — P. 151—176.
26. *Amosov, A. A.* Initial-Boundary Value Problem for the Non-Stationary Radiative Transfer Equation with Fresnel Reflection and Refraction Conditions / A. A. Amosov // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 231. — P. 279—337.
27. *Amosov, A. A.* Initial-Boundary Value Problem for the Nonstationary Radiative Transfer Equation with Diffuse Reflection and Refraction Conditions / A. A. Amosov // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 235. — P. 117—137.
28. Solvability of P1 approximation of a conductive–radiative heat transfer problem / A. E. Kovtanyuk [et al.] // Applied Mathematics and Computation. — 2014. — Vol. 249. — P. 247—252.
29. Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive–convective–radiative heat transfer / A. E. Kovtanyuk [et al.] // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2014. — Vol. 412, no. 1. — P. 520—528.

30. Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions / A. Y. Chebotarev [et al.] // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2018. — Vol. 57. — P. 290—298.
31. *Tse, O.* Identification of temperature-dependent parameters in laser-interstitial thermo therapy / O. Tse, R. Pinnau, N. Siedow // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. — 2012. — Vol. 22, no. 09. — P. 1250019.
32. Validation of a mathematical model for laser-induced thermotherapy in liver tissue / F. Hübner [et al.] // *Lasers in Medical Science*. — 2017. — Vol. 32. — P. 1399—1409.
33. Analysis of thermal processes in a multilayer biotissue exposed to optical radiation / A. E. Kovtanyuk [et al.] // *2017 Days on Diffraction (DD)*. — 2017. — P. 194—199.
34. *Kovtanyuk, A.* Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation / A. Kovtanyuk, A. Chebotarev, A. Astrakhantseva // *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2021. — Vol. 29, no. 3. — P. 467—476.
35. Numerical method for solving the nonstationary radiation transfer equation in a layered medium / O. N. Trofimova [и др.] // *2017 Days on Diffraction (DD)*. — 2017. — С. 319—324.
36. Elliptic formulation of the Simplified Spherical Harmonics Method in radiative heat transfer / M. F. Modest [et al.] // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. — 2014. — Vol. 76. — P. 459—466.
37. *Kovtanyuk, A. E.* Numerical simulations of a coupled radiative–conductive heat transfer model using a modified Monte Carlo method / A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. — 2012. — Vol. 55, no. 4. — P. 649—654.
38. Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects / A. E. Kovtanyuk [и др.] // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2016. — Т. 439, № 2. — С. 678—689.
39. Boundary optimal control problem of complex heat transfer model / G. V. Grenkin [и др.] // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2016. — Т. 433, № 2. — С. 1243—1260.

40. Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative–conductive heat transfer model / A. Y. Chebotarev [и др.] // *Applied Mathematics and Computation*. — 2016. — Т. 289. — С. 371–380.
41. Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange / A. Y. Chebotarev [et al.] // *J. of Mathematical Analysis and Applications*. — 2018. — Vol. 460, no. 2. — P. 737–744.
42. Moving heat source in a confined channel: Heat transfer and boiling in endovenous laser ablation of varicose veins / A. Boer [et al.] // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. — 2017. — Vol. 113. — P. 153–165.
43. Optical-thermal mathematical model for endovenous laser ablation of varicose veins / P. W. van Ruijven [et al.] // *Lasers in medical science*. — 2014. — Vol. 29, no. 2. — P. 431–439.
44. Endovenous laser ablation (EVLA): A review of mechanisms, modeling outcomes, and issues for debate / W. S. J. Malskat [et al.] // *Lasers in Medical Science*. — London, 2014. — Vol. 29, no. 2. — P. 393–403.
45. Some controversies in endovenous laser ablation of varicose veins addressed by optical–thermal mathematical modeling. / A. Poluektova [et al.] // *Lasers in medical science*. — 2014. — Vol. 29, no. 2. — P. 441–452.
46. *Mordon, S.* Mathematical modeling of 980-nm and 1320-nm endovenous laser treatment / S. Mordon, B. Wassmer, J. Zemmouri // *Lasers in surgery and medicine*. — 2007. — Vol. 39. — P. 256–265.
47. *Brizitskii, R. V.* Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation / R. V. Brizitskii, Z. Y. Saritskaya // *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2018. — Vol. 26, no. 6. — P. 821–833.
48. *Brizitskii, R. V.* Inverse coefficient problems for a non-linear convection-diffusion-reaction equation / R. V. Brizitskii, Z. Y. Saritskaya // *Izvestiya Mathematics*. — 2018. — Vol. 82, no. 1. — P. 14–30.
49. *Brizitskii, R.* Multiplicative Control Problems for Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Model / R. Brizitskii, Z. Saritskaia // *Journal of Dynamical and Control Systems*. — 2021. — Vol. 27, no. 2. — P. 379–402.

50. *Brizitskii, R.* Analysis of Boundary Value and Extremum Problems for a Nonlinear Reaction–Diffusion–Convection Equation / R. Brizitskii, V. S. Bystrova, Z. Saritskaia // *Differential Equations*. — 2021. — Vol. 57, no. 5. — P. 615–629.
51. Оптимальное управление внутривенной лазерной абляцией / А. Е. Ковтанюк [и др.] // *Оптика и спектроскопия*. — 2020. — Т. 128, № 9. — С. 1396–1404.
52. Optimal control with phase constraints for a quasilinear endovenous laser ablation model / A. Chebotarev [et al.] // *2021 Days on Diffraction (DD)*. — 2021. — Vol. 2837. — P. 19–24.
53. Penalty method to solve an optimal control problem for a quasilinear parabolic equation / A. Y. Chebotarev [et al.] // *Far Eastern Mathematical Journal*. — 2022. — Vol. 22, no. 2. — P. 158–163.
54. Mathematical and computer modeling of endovenous laser treatment / A. E. Kovtanyuk [et al.] // *CEUR Workshop Proceedings*. Vol. 2837. — 2021. — P. 13–23.
55. Mathematical modeling of complex heat transfer in the context of the endovenous laser ablation / A. Y. Chebotarev [et al.] // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2023. — Vol. 2514. — P. 012006.
56. Analysis of equations of complex heat transfer in context of endovenous laser ablation / A. Y. Chebotarev [и др.] // *2017 Days on Diffraction (DD)*. — 2017. — С. 73–77.
57. Пак, Н. М. Итерационный алгоритм решения начально-краевой задачи для квазилинейной модели сложного теплообмена / Н. М. Пак, А. Е. Ковтанюк // *Дальневосточный математический журнал*. — 2023. — Т. 23, № 2. — С. 240–245.
58. Чеботарев, А. Ю. Анализ и численное моделирование начально-краевой задачи для квазилинейных уравнений сложного теплообмена / А. Ю. Чеботарев, Н. М. Пак, А. Е. Ковтанюк. — 2023.
59. *Park, N.* Inverse extremum problem with phase constraints for a quasi-linear complex heat transfer model / N. Park, A. Kovtanyuk, A. Chebotarev // — 06/2023. — P. 168–173.
60. *Park, N.* Boundary optimal control of radiative-conductive heat transfer with reflection and refraction effects / N. Park, A. Chebotarev, A. Kovtanyuk // *2022 Days on Diffraction (DD)*. — 2022. — P. 106–110.

61. *Пак, Н. М.* Моделирование температурных полей при внутривенной лазерной абляции для излучения на различных длинах волн / Н. М. Пак // *Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам.* — 2021. — С. 253—254.
62. *Пак, Н. М.* Модель радиационно-кондуктивного теплообмена с движущимся источником / Н. М. Пак // *Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам.* — 2022. — С. 213—214.
63. *Degtyareva, A.* Optimization of the endovenous laser ablation model / A. Degtyareva, N. Park // *The 8th Annual Student Scientific Conference in English.* — 2021. — P. 134—135.
64. *Вычислительные технологии и прикладная математика // Материалы II Международного семинара (12–16 июня 2023 г., Благовещенск) / под ред. А. Г. Масловская.* — Благовещенск : Изд.-во Амурского гос. университета, 2023.
65. *Modest, M. F.* Radiative heat transfer / M. F. Modest. — Academic Press, 2013.
66. The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem / A. E. Kovtanyuk [et al.] // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* — 2014. — Vol. 409, no. 2. — P. 808—815.
67. *Лебедев, В.* Функциональный анализ и вычислительная математика / В. Лебедев. — 4-е изд. — ФМЛ, 2005.
68. *Hecht, F.* New development in freefem++ / F. Hecht // *J. of Numerical Mathematics.* — 2012. — Dec. — Vol. 20. — P. 251—265.
69. *Романов, В. Г.* Обобщенное неравенство Гронуолла — Беллмана / В. Г. Романов // *Сиб. матем. журн.* — 2020. — Т. 61, № 3. — С. 674—680.
70. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Нахождение решения начально-краевой задачи для модели внутривенной лазерной абляции / Н. М. Пак, А. Е. Ковтанюк ; АМГУ. — № 2023683111 ; заявл. 27.10.2023 ; опубл. 02.11.2023, 2023683111 (Рос. Федерация).
71. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Решение задачи оптимального управления для модели внутривенной лазерной абляции при фазовом ограничении / Н. М. Пак, А. Е. Ковтанюк ; АМГУ. — № 2024615240 ; заявл. 29.02.2024 ; опубл. 05.03.2024, 2024615240 (Рос. Федерация).

72. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Решение обратной экстремальной задачи для нелинейной модели сложного теплообмена / Н. М. Пак, А. Е. Ковтанюк ; АМГУ. — № 2024615421 ; заявл. 29.02.2024 ; опубл. 06.03.2024, 2024615421 (Рос. Федерация).*
73. *Бюл. № 11. RU2023683111. Нахождение решения начально-краевой задачи для модели внутривенной лазерной абляции / Н. М. Пак, А. Е. Ковтанюк ; АМГУ. — Оpubл. 02.11.2023.*
74. *Бюл. № 3. RU2024615240. Решение задачи оптимального управления для модели внутривенной лазерной абляции при фазовом ограничении / Н. М. Пак, А. Е. Ковтанюк ; АМГУ. — Оpubл. 05.03.2024.*
75. *Бюл. № 3. RU2024615421. Решение обратной экстремальной задачи для нелинейной модели сложного теплообмена / Н. М. Пак, А. Е. Ковтанюк ; АМГУ. — Оpubл. 06.03.2024.*

Приложение А

Копии свидетельств об официальных регистрациях программ для ЭВМ и вид графического интерфейса программного комплекса

Копия свидетельства об официальной регистрации программы для ЭВМ «Нахождение решения начально-краевой задачи для модели внутривенной лазерной абляции» и главное окно пользовательского интерфейса программы представлены на рисунках А.1 и А.2



Рисунок А.1 — Копия свидетельства 1

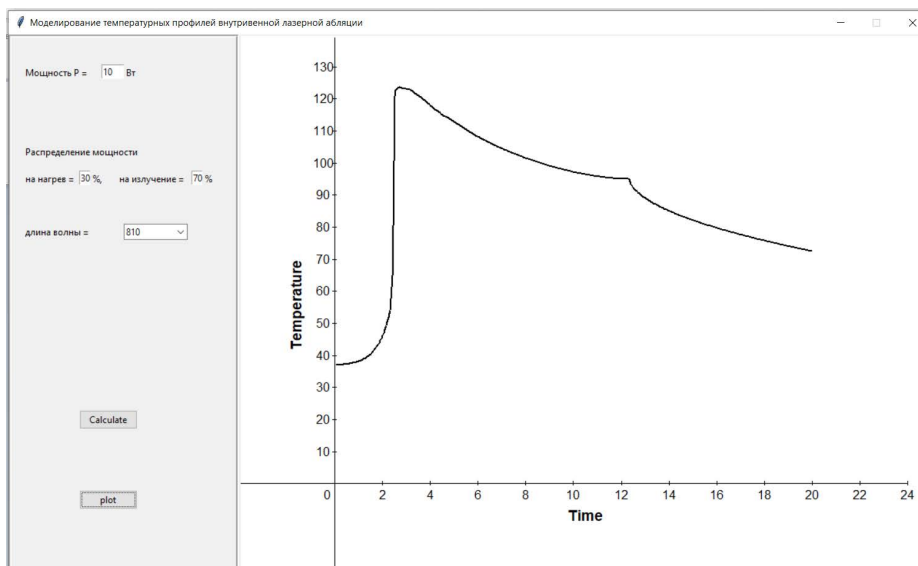


Рисунок А.2 — Общий вид интерфейса программы нахождения решения начально-краевой задачи для модели внутривенной лазерной абляции

Аннотация программы. Программа предназначена для нахождения решения начально-краевой задачи для квазилинейной модели внутривенной лазерной абляции, представляющей собой P1-приближение системы уравнений сложного (радиационно-кондуктивного) теплообмена. Для нахождения решения начально-краевой задачи используется итерационный алгоритм. Нахождение приближения решения на каждом шаге итерационного алгоритма осуществляется с помощью метода конечных элементов с использованием пакета FreeFEM++. Программа позволяет найти распределение температуры и интенсивности излучения внутри вены и в окружающей ткани. Программа может быть использована для предварительного подбора характеристик излучения при проведении процедуры внутривенной лазерной абляции.

Копия свидетельства об официальной регистрации программы для ЭВМ «Решение задачи оптимального управления для модели внутривенной лазерной абляции при фазовом ограничении» и главное окно пользовательского интерфейса программы представлены на рисунках А.3 и А.4



Рисунок А.3 — Копия свидетельства 2

Аннотация программы. Программа позволяет найти приближение решения задачи оптимального управления для квазилинейной модели внутривенной лазерной абляции, представляющей собой P1-приближение системы уравнений радиационного и кондуктивного теплообмена. Требуется подобрать характеристики излучения, обеспечивающие приближение температурного профиля в точке

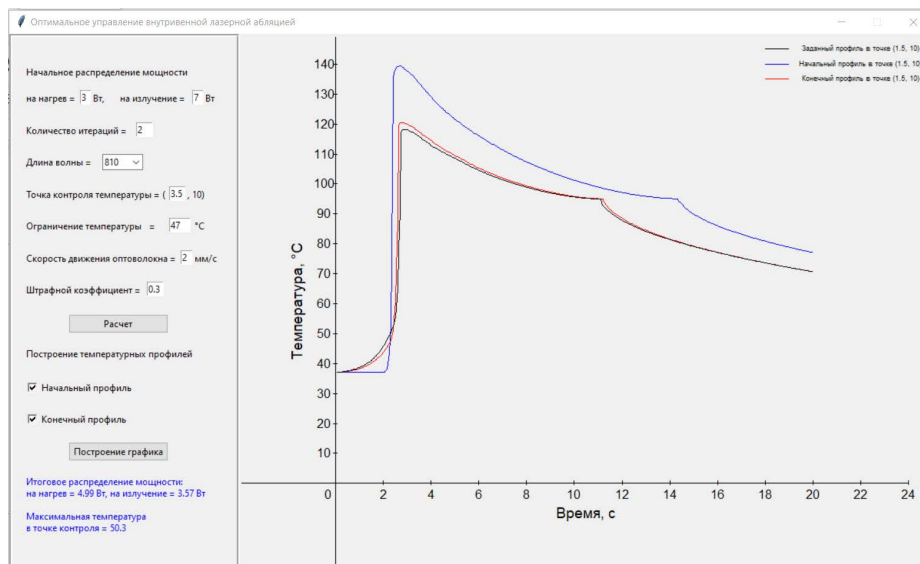


Рисунок А.4 — Общий вид интерфейса программы для решения задачи оптимального управления для модели внутривенной лазерной абляции при фазовом ограничении

наблюдения к заданному, при этом в некоторой контрольной точке температура не должна превышать выбранного критического значения. Для нахождения решения задачи оптимального управления используется метод штрафных функций, который реализуется с помощью итерационного алгоритма. Программа может быть использована для предварительного подбора характеристик излучения при проведении процедуры внутривенной лазерной абляции.

Копия свидетельства об официальной регистрации программы для ЭВМ «Решение обратной экстремальной задачи для нелинейной модели сложного теплообмена» и главное окно пользовательского интерфейса программы представлены на рисунках А.5 и А.6 Аннотация программы. Программа предназначена для



Рисунок А.5 — а) копия свидетельства и б) общий вид интерфейса программы для решения обратной экстремальной задачи для нелинейной модели сложного теплообмена

нахождения решения обратной экстремальной задачи для квазилинейных уравнений сложного теплообмена, моделирующих процесс внутривенной лазерной абляции. Требуется определить характеристики излучения, обеспечивающие рас-

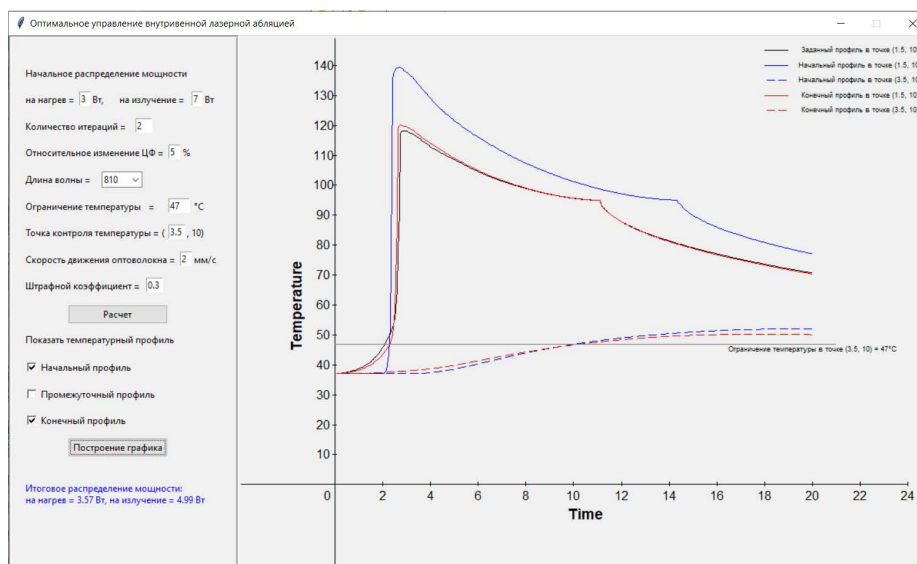


Рисунок А.6 — Общий вид интерфейса программы для решения обратной экстремальной задачи для нелинейной модели сложного теплообмена

пределение температуры в заданной подобласти, близкое к желаемому, при этом должно выполняться ограничение на температуру в некоторой контрольной подобласти. Модель учитывает поступление тепловой энергии за счет различных механизмов: кондуктивный перенос тепла, выделение тепла за счет поглощения лазерного излучения, излучение черного тела и перенос тепла потоком пузырьков. Программа может быть использована для предварительного подбора характеристик излучения при проведении процедуры внутривенной лазерной абляции.