

**МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ**  
**29.04.2021**

**Задание 1 (5 баллов)**

Вычислить  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{2021}$ .

**Задание 2 (10 баллов)**

Найдите наименьшее значение функции  $u = 4x - 6y + 12z - 5$  на множестве  $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1$ .

**Задание 3 (9 баллов)**

Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}.$$

**Задание 4 (5 баллов)**

Вычислить предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} \right).$$

**Задание 5 (5 баллов)**

Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

**Задание 6 (6 баллов)**

Вычислить

$$\int_{1/a}^a \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

**Задание 7 (5 баллов)**

Функция определена и удовлетворяет соотношению:

$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x$$

при всех  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 1$ . Найти все такие функции.

**Задание 8 (9 баллов)**

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' \cos x + y'(5 \cos x - 2 \sin x) + y(3 \cos x - 5 \sin x) = e^{-x}.$$

**Задание 9 (5 баллов)**

Доказать, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

**Задание 10 (11 баллов)**

Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{x^2 dx}{(\sin x - x \cos x)^2}.$$

**Задание 11 (8 баллов)**

Числа  $p$  и  $q$  случайно выбраны на отрезках  $[2, 6]$ ,  $[0, 4]$  соответственно. Найти вероятность того, что корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$  действительные и различные.

**Задание 12 (9 баллов)**

Решить задачу Коши:

$$xyy'' - x(y')^2 = 2yy', \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 3e.$$

**Задание 13 (7 баллов)**

Докажите, что многочлен

$$P(x) = x^n \sin \varphi - \rho^{n-1} x \sin n\varphi + \rho^n \sin(n-1)\varphi$$

делится на

$$x^2 - 2\rho x \cos \varphi + \rho^2.$$

**Задание 14 (6 баллов)**

Решить дифференциальное уравнение:

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$$