ЧЕТВЕРТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
БЛАГОВЕЩЕНСК – РОССИЯ, 16 марта 2024 г.

THE FOURTH INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
Blagoveshchensk – Russia, 16 March 2024

第四届国际数学奥林匹克竞赛

布拉戈维申斯克-俄罗斯，2024年3月16日

Формулировки задач и решения

Задание 1 ***(9 баллов)***

Доказать неравенство

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<2,\ \ n\geq 2.$$

Решение:

Логарифмируем левую часть неравенства, используем известный факт: $\ln(1+x)<x, x\neq 0$, а также формулу суммы членов геометрической прогрессии

$$\ln\left(\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right)=\sum\nolimits_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)<\sum\nolimits_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2}<\ln 2.$$

Задание 2 ***(11 баллов)***

Вычислить неопределенный интеграл

$$I=\int\frac{\cos x+\sin x}{5\cos^2 x-2\sin 2x+2\sin^2 x}dx.$$

Ответ: $I = -\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(2\cos x - \sin x) + \frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+(\cos x+2\sin x)}{\sqrt{6}-(\cos x+2\sin x)}\right| + C.$

Решение:
Заметим

$$5\cos^2 x - 2\sin 2x + 2\sin^2 x = (2\cos x - \sin x)^2 + 1 = 6 - (\cos x + 2\sin x)^2;$$

$$\sin x - \cos x = -\frac{3}{5}(2\cos x - \sin x) + \frac{1}{5}(\cos x + 2\sin x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ (\cos x + \sin x)dx = d(\sin x - \cos x)$$

$$= -\frac{3}{5}d(2\cos x - \sin x) + \frac{1}{5}d(\cos x + 2\sin x).$$

Преобразуем интеграл

$$I = \int \frac{\cos x + \sin x}{5\cos^2 x - 2\sin 2x + 2\sin^2 x}dx =$$

$$= -\frac{3}{5}\int \frac{d(2\cos x - \sin x)}{(2\cos x - \sin x)^2 + 1} + \frac{1}{5}\int \frac{d(\cos x + 2\sin x)}{6 - (\cos x + 2\sin x)^2} =$$

$$= -\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(2\cos x - \sin x) + \frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6} + (\cos x + 2\sin x)}{\sqrt{6} - (\cos x + 2\sin x)}\right| + C.$$

Задание 3 ***(9 баллов)***
Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^{2023} - 1}{\ln x}dx.$$

Ответ: $\ln 2024$.

Решение:
Рассмотрим более общую задачу:

$$I(a,b)=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1 dx\int_a^b x^y\,dy=\int_a^b dy\int_0^1 x^y dx=\int_a^b \frac{x^y}{y+1}\bigg|_0^1 dy$$
$$=\int_a^b \frac{dy}{y+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Отсюда,

$$\int_0^1 \frac{x^{2023}-1}{\ln x}dx=\ln 2024.$$

Задание 4 ***(10 баллов)***

Найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}.$$

Ответ: 3/2.

Решение:

а)

Очевидно, данный ряд сходится. Используем свойство независимости суммы сходящегося ряда (положительного) от перестановки его членов и формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{27}+\frac{16}{81}+\frac{25}{243}+\cdots=$$
$$=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{9}+\frac{3}{9}\right)+\left(\frac{1}{27}+\frac{3}{27}+\frac{5}{27}\right)+\left(\frac{1}{81}+\frac{3}{81}+\frac{5}{81}+\frac{7}{81}\right)+\cdots=$$
$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots\right)+3\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots\right)+5\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots\right)+\cdots=$$
$$=\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{18}+7\cdot\frac{1}{54}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{3}{3}+\frac{5}{9}+\frac{7}{27}+\frac{9}{81}+\cdots\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\right)+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\right)+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots\right)+\cdots\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{6}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}.$$

б)

Заметим

$$S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}S_1 + S_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}S_1 = S_0 \Rightarrow S_1 = \frac{3}{2}S_0 = \frac{3}{4}.$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}S_2 + \frac{2}{3}S_1 + S_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}S_2 = \frac{2}{3}S_1 + S_0 \Rightarrow S_2 = S_1 + \frac{3}{2}S_0 = \frac{3}{2}.$$

Задание 5 ***(9 баллов)***

Найти все действительные решения уравнения

$$(2x^3 + x - 3)^3 = 3 - x^3.$$

Ответ: $\sqrt[3]{3/2}$ – один действительный корень.

Решение:

Рассмотрим функцию

$$f(x) = (2x^3 + x - 3)^3 + x^3 - 3;$$

ее производная

$$f'(x) = 3(2x^3 + x - 3)^2(6x^2 + 1) + 3x^2 > 0,$$

поэтому сама функция $f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой оси от $-\infty$ до $+\infty$ и имеет единственный действительный корень. Преобразуем левую часть уравнения

$$(2x^3 + x - 3)^3 = (2x^3 - 3)^3 + 3x(2x^3 - 3)^2 + 3x^2(2x^3 - 3) + x^3.$$

Исходное уравнение приводится к виду

$$(2x^3 - 3)((2x^3 - 3)^2 + 3x(2x^3 - 3) + 3x^2 + 1) = 0,$$

откуда определяется единственный корень $x = \sqrt[3]{3/2}$.

Задание 6 ***(9 баллов)***
Найти условный экстремум функции
$$u = xyz$$
при следующих уравнениях связи
$$xy + yz + zx = 9, \;\; x + y + z = 6.$$

Ответ: $u_{max} = u(1,4,1) = u(4,1,1) = u(1,1,4) = 4$; $u_{min} = u(0,3,3) = u(3,0,3) = u(3,3,0) = 0$.

Решение:
Из системы уравнений связи находим
$$\begin{cases} xy + yz + zx = 9, \\ x + y + z = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 9 - (x + y)z, \\ x + y = 6 - z. \end{cases}$$
Откуда получаем $xy = 9 - (6 - z)z$, тогда целевая функция принимает вид
$$u = xyz = (9 - (6 - z)z)z = z^3 - 6z^2 + 9z = \varphi(z).$$
Исследуем функцию $\varphi(z)$ на безусловный экстремум. Найдем первую производную и стационарные точки:
$$\varphi'(z) = 3z^2 - 12z + 9 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_1 = 1, \;\; z_2 = 3.$$
Очевидно, что первая стационарная точка является точкой максимума для функции $\varphi(z)$, поскольку
$$\varphi''(1) = (6z - 12)|_{z=1} = -6 < 0.$$
Это точке соответствуют две пары x и y – $x_{1,1} = 1, \;\; y_{1,1} = 4$ и $x_{1,2} = 4, \;\; y_{1,2} = 1$. Тем самым, получаем две точки условного максимума – $M_1(1,4,1)$ и $M_2(4,1,1)$. Очевидно, в силу симметрии условий связи и целевой функции, будем иметь и третью точку условного максимума $M_3(1,1,4)$ (эта точка может быть получена, если выражать из системы уравнений связи xz или yz). Значение условного максимума равно
$$u_{max} = u(1,4,1) = u(4,1,1) = u(1,1,4) = \varphi(1) = 4.$$
Аналогично, вторая стационарная точка является точкой минимума для функции $\varphi(z)$, поскольку
$$\varphi''(3) = (6z - 12)|_{z=3} = 6 > 0.$$
Это точке соответствуют две пары x и y – $x_{2,1} = 0, \;\; y_{2,1} = 3$ и $x_{2,2} = 3, \;\; y_{2,2} = 0$. Откуда получаем две точки условного минимума – $N_1(0,3,3)$ и $N_2(3,0,3)$. И в силу симметрии условий связи и целевой функции находим третью точку условного минимума $N_3(3,3,0)$. Значение условного минимума равно
$$u_{min} = u(0,3,3) = u(3,0,3) = u(3,3,0) = \varphi(3) = 0.$$

Задание 7 ***(10 баллов)***
Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y^2dx + (e^x - y)dy = 0.$$

Ответ: $e^x \ln(Cy) = y$.

Решение:
Замена $e^x = z,\ dz = e^x dx = zdx$. Тогда

$$y^2\frac{dz}{z} + (z-y)dy = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dy} = -\frac{z^2 - zy}{y^2}.$$

$$z = ty, \qquad \frac{dz}{dy} = \frac{dt}{dy}y + t \Rightarrow \frac{dt}{dy}y + t = -t^2 + t \Rightarrow \frac{1}{t} = \ln(Cy) \Rightarrow e^x = \frac{y}{\ln(Cy)}.$$

***Задание 8** (11 баллов)*
Найти общее решение системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = \dfrac{z}{x}, \\ z' = \dfrac{z(y+2z-1)}{x(y-1)}. \end{cases}$$

Ответ: $y(x) = \frac{C_2 x - C_1 - 1}{C_2 x - C_1}$, $\quad z(x) = \frac{C_2 x}{(C_2 x - C_1)^2}$.

Решение:
Исключаем x и переходим к функции $z = z(y)$:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y + 2z - 1}{y - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dy} = \frac{2z}{y-1} + 1.$$

Решаем полученное уравнение методом Бернулли:

$$z(y) = u(y)v(y),\ \ z' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' = \frac{2uv}{y-1} + 1.$$

Подбираем функцию $v(y)$ так, чтобы

$$v' = \frac{2v}{y-1} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2dy}{y-1} \Rightarrow v = (y-1)^2.$$

После этого имеем

$$u'(y-1)^2 = 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{(y-1)^2} \Rightarrow u = -\frac{1}{y-1} + C_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z = uv = C_1(y-1)^2 - (y-1).$$

Далее возвращаемся к независимой переменной x:

$$y'x = C_1(y-1)^2 - (y-1) \Rightarrow \frac{dy}{C_1(y-1)^2 - (y-1)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{C_1}{C_1(y-1)-1} - \frac{1}{y-1}\right) dy = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\frac{C_1(y-1)-1}{y-1} = \ln(C_2 x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{C_1(y-1)-1}{y-1} = C_2 x \Rightarrow y-1 = -\frac{1}{C_2 x - C_1} \Rightarrow y = \frac{C_2 x - C_1 - 1}{C_2 x - C_1}.$$
Осталось найти $z(x)$:
$$z(x) = y' \cdot x = \frac{C_2 x}{(C_2 x - C_1)^2}.$$

Задание 9 ***(11 баллов)***

Вычислить определитель n-го порядка
$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 9 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Ответ: $3^{n-2}(16-7n)$.

Решение:

Обозначим Δ_k – главный диагональный минор k-го порядка. Тогда
$$\Delta_1 = 3,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2,\ \Delta_3 = 6\Delta_2 - 9\Delta_1 = 3(2\Delta_2 - 3\Delta_1),$$
$$\Delta_4 = 6\Delta_3 - 9\Delta_2 = 3(2\Delta_3 - 3\Delta_2) = 3^2(3\Delta_2 - 6\Delta_1),$$
$$\Delta_5 = 6\Delta_4 - 9\Delta_3 = 3(2\Delta_4 - 3\Delta_3) = 3^3(4\Delta_2 - 9\Delta_1),$$
далее по индукции находим
$$\Delta_k = 6\Delta_{k-1} - 9\Delta_{k-2} = 3^{k-2}[(k-1)\Delta_2 - 3(k-2)\Delta_1].$$
Окончательно
$$\Delta_n = 3^{n-2}[(n-1)\Delta_2 - 3(n-2)\Delta_1] = 3^{n-2}(16-7n),$$
где n – порядок определителя.

Задание 10 ***(11 баллов)***

Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и равномерно распределены на отрезке $[0;\ 1]$. Найти вероятность $P(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \le x)$ при $x \ge 0$.

Ответ: $\frac{x^3}{6}$ при $0 \le x \le 1$; $\frac{[x^3-3(x-1)^3]}{6}$ при $1 \le x \le 2$; $1 - \frac{(3-x)^3}{6}$ при $2 \le x \le 3$; 1 при $x \ge 3$.

Решение:

Представим множество возможных значений случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 в виде единичного куба в R^3. Тогда искомая вероятность определяется как отношение объема части единичного куба, ограниченного наклонной плоскостью $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = x$, к объему единичного куба, то есть к единице, а именно:

$$P(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \le x) = \begin{cases} x^3/6 \text{ при } 0 \le x \le 1; \\ [x^3 - 3(x-1)^3]/6 \text{ при } 1 \le x \le 2; \\ 1 - (3-x)^3/6 \text{ при } 2 \le x \le 3; \\ 1 \text{ при } x \ge 3. \end{cases}$$