МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Формулировки задач и решения

<u>Задание 1</u> (5 баллов)

Вычислить $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{2021}$.

<u>Ответ</u>: $\begin{pmatrix} 2^{2021} & 2^{2021}-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2021} \end{pmatrix}$.

<u>Решение</u>. Представим $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Заметим $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$ $(n \geq 2,\ n \in N)$,

$$\boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{B} = 2^k \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{B} \ (k \geq 2,\ k \in N).$$

При возведении в степень бинома $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\boldsymbol{n}}$ ненулевыми будут только те слагаемые, в которых суммарная степень матрицы $\boldsymbol{B}$ не превышает единицы

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n-1}} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n-2}} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} + \cdots + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n-2}} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n-1}} =$$
$$= \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} + 2^{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{B} + 2^{\boldsymbol{n-2}}\boldsymbol{B} + \cdots + 2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} + (2^{\boldsymbol{n-1}} + 2^{\boldsymbol{n-2}} + \cdots + 2 + 1)\boldsymbol{B} =$$
$$= \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} + (2^{\boldsymbol{n}} - 1)\boldsymbol{B}.$$

Окончательно получаем при $n = 2021$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{2021} = \begin{pmatrix} 2^{2021} & 2^{2021}-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2021} \end{pmatrix}.$$

<u>Задание 2</u> (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $u = 4x - 6y + 12z - 5$ на множестве

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1.$$

<u>Ответ</u>: $u_{min} = -36\sqrt{3} - 5$.

<u>Решение</u>. Осуществим аффинное преобразование координат:

$$x' = \frac{x}{3}, y' = \frac{y}{2}, z' = \frac{z}{5}.$$

В новых координатах функция имеет вид $u = 12x' - 12y' + 60z' - 5$, а множество является единичной сферой ${x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2 = 1$.

Семейство поверхностей уровня функции u представляют собой семейство параллельных плоскостей, при переходе с одной плоскости на другую значение функции растет в направлении градиента функции u (или общего нормального вектора параллельных плоскостей) $\boldsymbol{N} = (12; -12; 60)$. Две плоскости из этого семейства касаются единичной сферы в точках условного экстремума функции u - максимуме и минимуме. Точка минимума определяется на сфере направлением антиградиента - ее координаты совпадают с координатами вектора единичного антиградиента $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{N}/|\boldsymbol{N}| = (-1;\ 1;\ -5)/(3\sqrt{3})$.

Подставляем значения

$$x' = -\frac{1}{3\sqrt{3}},\quad y' = \frac{1}{3\sqrt{3}},\quad z' = -\frac{5}{3\sqrt{3}}$$

в выражение функции, получаем

$$u = 12 \cdot \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) - 12 \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} + 60 \cdot \left(-\frac{5}{3\sqrt{3}}\right) - 5 = -36\sqrt{3} - 5. \blacktriangledown$$

<u>Задание 3</u> (9 баллов)

Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}.$$

<u>Ответ</u>: $e^{\cos x} \sin(\sin x)$.

<u>Решение</u>. Используем комплексное представление

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{(2i) \cdot n!} = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-inx}}{n!}\right) = \frac{1}{2i}\left(exp\left(e^{ix}\right) - exp\left(e^{-ix}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{\cos x} e^{i \sin x} - e^{\cos x} e^{-i \sin x}\right) = \frac{e^{\cos x}}{2i}\left(e^{i \sin x} - e^{-i \sin x}\right) = e^{\cos x} \sin(\sin x) . \blacktriangledown$$

<u>Задание 4</u> (5 баллов)
Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right).$$

<u>Ответ</u>: $\frac{\sin x}{x}$.

<u>Решение</u>.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\right)=\frac{\sin x}{x}.\blacktriangledown$$

<u>Задание 5</u> (5 баллов)
Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

<u>Решение</u>. Обозначим $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ – векторы с общим началом, направленные из вершины вдоль ребер данного параллелепипеда и образующие правую тройку векторов. Тогда $V=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ - объем и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$ - векторы диагоналей граней, также образующие правую тройку векторов. Объем V_1 параллелепипеда, построенного на диагоналях, равен
$V_1=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=\boldsymbol{2}V.\blacktriangledown$

<u>Задание 6</u> (6 баллов)
Вычислить

$$\int_{1/a}^{a}\frac{lnx}{1+x^2}dx.$$

<u>Ответ</u>: 0.

<u>Решение</u>.

$$\int_{1/a}^{a}\frac{lnx}{1+x^2}dx=\int_{1/a}^{a}\frac{ln\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}d\left(\frac{1}{x}\right)=\int_{a}^{1/a}\frac{lnt}{1+t^2}dt=-\int_{1/a}^{a}\frac{lnx}{1+x^2}dx.$$

Отсюда

$$\int_{1/a}^{a}\frac{lnx}{1+x^2}dx=0.\blacktriangledown$$

***Задание 7* (5 баллов)**

Функция определена и удовлетворяет соотношению:

$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-f(x)=x \qquad (*)$$

при всех $x \in R,\ x \neq 1$. Найти все такие функции.

Ответ: $f(x)=2x+1$.

Решение. Обозначим $y=\frac{x+1}{x-1}$, тогда

$$x=\frac{y+1}{y-1},\ x-1=\frac{2}{y-1},\ \frac{2}{y-1}f(y)-f\left(\frac{y+1}{y-1}\right)=\frac{y+1}{y-1},$$

или

$$2f(y)-(y-1)f\left(\frac{y+1}{y-1}\right)=y+1,$$

или

$$2f(x)-(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x+1.$$

Тогда из (*) получаем

$$f(x)=2x+1.\blacktriangledown$$

***Задание 8* (9 баллов)**

Решить дифференциальное уравнение

$$y''\cos x+y'(5\cos x-2\sin x)+y(3\cos x-5\sin x)=e^{-x}.$$

Ответ: $y=\left(C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+\frac{1}{3}xe^{-x}\right)/\cos x$.

Решение. Выполним замену

$$z=y\cos x\,,\ z'=y'\cos x-y\sin x\,,\ z''=y''\cos x-2y'\sin x-y\cos x.$$

Преобразуя левую часть, получаем

$$z''+5z'+4z=e^{-x}$$

- линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и правой частью. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z_0=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}.$$

Частное решение ищем в виде

$$\tilde{z}=Axe^{-x},$$

после подстановки в полное уравнение находим $A=1/3$. Общее решение имеет вид

$$z=z_0+\tilde{z}=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+\frac{1}{3}xe^{-x}.$$

Возвращаемся к переменной *y*:

$$y\cos x=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+\frac{1}{3}xe^{-x}.$$

Окончательно

$$y=\left(C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+\frac{1}{3}xe^{-x}\right)/\cos x\,.\blacktriangledown$$

<u>Задание 9</u> (5 баллов)

Доказать, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

<u>Решение</u>. Обозначим

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100},\ \ B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}.$$

Сравнивая по порядку сомножители, заметим $A<B$.

Отсюда

$$A\cdot A<A\cdot B=\frac{1}{100}\Rightarrow A<\frac{1}{10}.\blacktriangledown$$

<u>Задание 10</u> (11 баллов)

Вычислить интеграл

$$I=\int\frac{x^2dx}{(\sin x-x\cos x)^2}.$$

<u>Ответ</u>: $I=-\frac{x}{\sin x\,(\sin x-x\cos x)}-ctgx+C.$

<u>Решение</u>. Заметим

$$(\sin x-x\cos x)'=x\sin x,\qquad \left(\frac{x}{\sin x}\right)'=\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}.$$

Далее

$$I=\int\frac{x^2dx}{(\sin x-x\cos x)^2}=\int\frac{x}{\sin x}\frac{x\sin x\,dx}{(\sin x-x\cos x)^2}=\int\frac{x}{\sin x}\frac{(\sin x-x\cos x)'dx}{(\sin x-x\cos x)^2}=$$

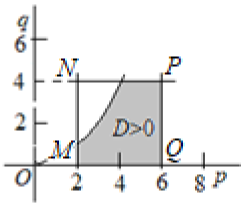
$$=-\int\frac{x}{\sin x}d\left(\frac{1}{\sin x-x\cos x}\right)=-\frac{x}{\sin x\,(\sin x-x\cos x)}+\int\frac{1}{\sin x-x\cos x}d\left(\frac{x}{\sin x}\right)=$$

$$=-\frac{x}{\sin x\,(\sin x-x\cos x)}+\int\frac{\left(\frac{x}{\sin x}\right)'}{\sin x-x\cos x}dx=-\frac{x}{\sin x\,(\sin x-x\cos x)}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{x}{\sin x\,(\sin x-x\cos x)}-Ctgx+C.\blacktriangledown$$

Задание 11 ***(8 баллов)***
Числа p и q случайно выбраны на отрезках $[2,6]$, $[0,4]$ соответственно. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ действительные и различные.

Ответ: $19/24$.



Решение. Обозначим: событие A – корни действительные. Рассмотрим множество возможных значений p и q на плоскости – квадрат $MNPQ$. Условие существования действительных корней - $D = p^2 - 4q > 0$. Вероятность того, что корни действительные, совпадает с долей площади квадрата, в которой $D > 0$. Учитывая, что парабола $p^2 - 4q = 0$ проходит через точку $(4,\ 4)$, определяем вероятность события A как отношение площадей той части квадрата, где $D > 0$, к площади всего квадрата:

$$P(A) = \frac{1}{16}\left(\int_2^4 \frac{1}{4}p^2 dp + 8\right) = \frac{19}{24}.\blacktriangledown$$

Задание 12 ***(9 баллов)***
Решить задачу Коши:

$$xyy'' - x(y')^2 = 2yy', \quad y(1) = e,\ y'(1) = 3e.$$

Ответ:

$$y = e^{x^3}.$$

Решение. Заметим

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''y - (y')^2}{y^2},$$

поэтому, учитывая, что в окрестности точки $x = 1$ выполняются условия существования и единственности решения и $y(x) \neq 0$, поделим все на xy^2 и преобразуем

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{2}{x} \cdot \frac{y'}{y},$$

или, выполнив замену, находим

$$z = \frac{y'}{y} \Rightarrow z' = \frac{2}{x} \cdot z \Rightarrow \frac{dz}{z} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow lnz = lnC_1x^2 \Rightarrow z = C_1x^2.$$

Возвращаемся к переменной y:

$$\frac{y'}{y} = C_1x^2 \Rightarrow \frac{dy}{y} = C_1x^2dx \Rightarrow y = C_2e^{\tilde{C}_1x^3},\ y' = 3C_2\tilde{C}_1x^2e^{\tilde{C}_1x^3}.$$

Используем начальные условия

$$y(1) = e,\ y'^{(1)} = 3e \Rightarrow C_2e^{\tilde{C}_1} = e,\ 3C_2\tilde{C}_1e^{\tilde{C}_1} = 3e \Rightarrow \tilde{C}_1 = C_2 = 1.$$

Окончательно

$$y = e^{x^3}.\blacktriangledown$$

<u>Задание 13</u> (7 баллов)

Докажите, что многочлен

$$P(x) = x^n \sin\varphi - \rho^{n-1} x \sin n\varphi + \rho^n \sin(n-1)\varphi$$

делится на

$$x^2 - 2\rho x \cos\varphi + \rho^2.$$

<u>Решение</u>. Заметим, что корнями квадратного трехчлена являются числа

$$x_{1,2} = \rho(\cos\varphi \pm i \sin\varphi),$$

где i – мнимая единица. Для доказательства достаточно установить наличие этих корней у многочлена $P(x)$. Подставим

$$P(x) = \rho^n (\cos\varphi \pm i \sin\varphi)^n \sin\varphi - \rho^n (\cos\varphi \pm i \sin\varphi) \sin n\varphi + \rho^n \sin(n-1)\varphi =$$
$$= \rho^n (\cos n\varphi \pm i \sin n\varphi) \sin\varphi - \rho^n (\cos\varphi \pm i \sin\varphi) \sin n\varphi + \rho^n \sin(n-1)\varphi =$$
$$= \rho^n \big(\cos n\varphi \sin\varphi - \cos\varphi \sin n\varphi + \sin(n-1)\varphi \pm i(\sin n\varphi \sin\varphi - \sin\varphi \sin n\varphi)\big) = 0$$

Здесь использована формула Муавра: $(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i \sin n\varphi$.▼

<u>Задание 14</u> (6 баллов)

Решить дифференциальное уравнение:

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$$

<u>Ответ</u>: $y = e^x - \frac{1}{x+C}$.

<u>Решение</u>. Замена

$$z(x) = y(x) - e^x,\ \ z' = y' - e^x,\ \ z^2 = y^2 - 2ye^x + e^{2x},$$

тогда

$$z' = z^2 \ \Rightarrow\ \frac{dz}{z^2} = dx \ \Rightarrow\ -\frac{1}{z} = x + C \ \Rightarrow\ z = -\frac{1}{x+C} \ \Rightarrow\ y = e^x - \frac{1}{x+C}.$$▼