ПЯТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
Благовещенск - Россия, 15 марта 2025 г.

THE FIFTH INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
Blagoveshchensk – Russia, 15 March 2025

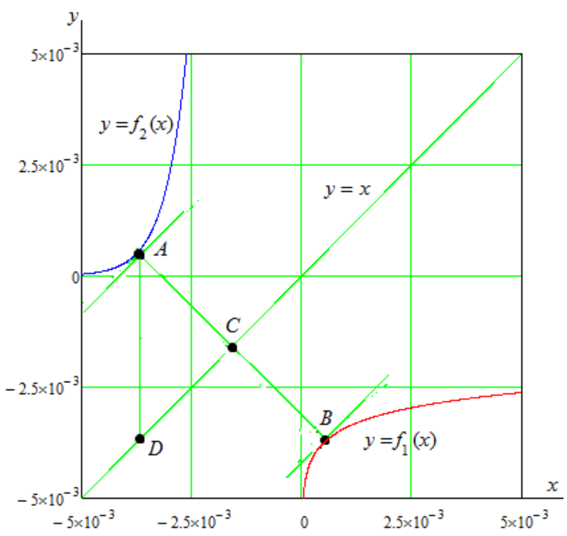
第五届跨国大学生数学奥林匹克竞赛
布拉戈维申斯克-俄罗斯, 2025年3月15日

Формулировки задач и решения

Задание 1 ***(10 баллов)***
Найти расстояние между графиками функций
$$f_1(x) = \frac{\ln x}{2025} \quad \text{и} \quad f_2(x) = e^{2025x}.$$

Ответ: $\sqrt{2}(1 + \ln 2025)/2025$.

Решение: Заметим, что данные функции являются взаимно обратными и их графики расположены симметрично относительно прямой $y = x$. Поэтому искомое расстояние



$$AB = 2AC = \sqrt{2}\,AD.$$

Координаты точки A определяются из условия
$$f'_2(x_A) = 1,$$
или
$$2025 \cdot e^{2025x_A} = 1$$
$$\Longrightarrow\ x_A = -\frac{\ln 2025}{2025};$$
расстояние AD находим как разность
$$AD = f_2(x_A) - x_A = \frac{1 + \ln 2025}{2025}.$$
Окончательно,
$$AB = \sqrt{2}\,AD = \sqrt{2}\,\frac{1 + \ln 2025}{2025}. \blacksquare$$

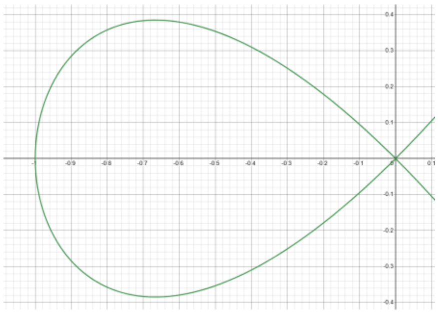
Задание 2 ***(10 баллов)***

Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей кривой $x^3 + x^2 - y^2 = 0$.

Ответ: 8/15.

Решение: Анализируя график кривой, заключаем, что он симметричен относительно оси x и является замкнутой кривой на участке $-1 \le x \le 0$, $y(-1) = y(0) = 0$. Поэтому петля расположена на интервале $[-1; 0]$ и ограничена линиями

$$y = \pm\sqrt{x^2(x+1)}.$$



Площадь, ограниченная петлей

$$S = 2\int_{-1}^{0} |x|\sqrt{x+1}\,dx = \left\langle \begin{matrix} t = \sqrt{x+1}, \ |x| = 1 - t^2, \ dx = 2tdt, \\ x = -1 \ \Rightarrow t = 0, \ x = 0 \ \Rightarrow t = 1 \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= 2\int_{0}^{1} (1 - t^2)t \cdot 2tdt = \cdots = \frac{8}{15}. \blacksquare$$

Задание 3 ***(10 баллов)***

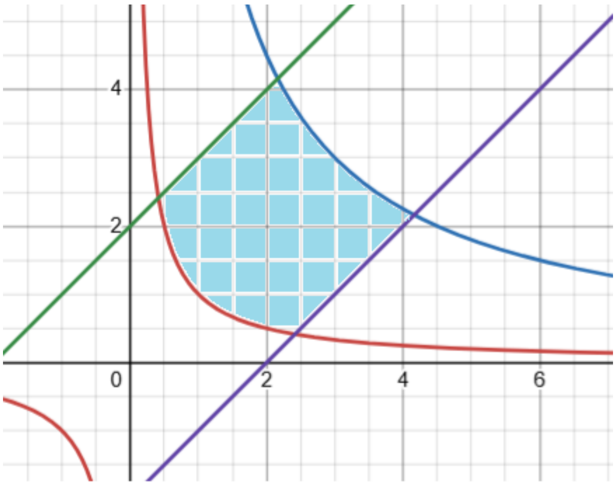
Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D (x + y)dxdy,$$

где область D ограничена кривыми $xy = 1$, $xy = 9$, $y - x = 2$, $x - y = 2$ $(x > 0, y > 0)$.

Ответ: 32.

Решение: Область интегрирования представляет собой криволинейную трапецию и изображена на рисунке.



Очевидно, непосредственное вычисление интеграла сведением его к трем повторным затруднительно. Выполним следующую замену переменных

$$xy = u,\ y - x = v.$$

а) Откуда находим (с учетом расположения области в I четверти)

$$x = \frac{1}{2}\left(-v + \sqrt{v^2 + 4u}\right), y = \frac{1}{2}\left(v + \sqrt{v^2 + 4u}\right).$$

Вычислим якобиан преобразования:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{v^2 + 4u}} & \dfrac{1}{\sqrt{v^2 + 4u}} \\ \dfrac{v - \sqrt{v^2 + 4u}}{2\sqrt{v^2 + 4u}} & \dfrac{v + \sqrt{v^2 + 4u}}{2\sqrt{v^2 + 4u}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v^2 + 4u}}.$$

Подынтегральная функция преобразуется к виду

$$f(x, y) = x + y \quad \Longrightarrow \quad f(x(u, v), (u, v)) = \sqrt{v^2 + 4u}$$

Область интегрирования в новой системе координат Ouv имеет представление

$$D' = \begin{cases} 1 \le u \le 9, \\ -2 \le v \le 2. \end{cases}$$

Тогда, пользуясь формулой замены переменных в двойном интеграле, находим

$$\iint\limits_D (x + y)dxdy = \iint\limits_{D'} \sqrt{v^2 + 4u} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2 + 4u}} dudv = \int\limits_1^9 \left(\int\limits_{-2}^{2} dv \right) du = 32.$$

б) Вычислим якобианы прямого и обратного преобразований:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x & v'_x \\ u'_y & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & -1 \\ x & 1 \end{vmatrix} = x + y;\quad J_1 = \frac{1}{J(x, y)} = \frac{1}{x + y}.$$

Область интегрирования в новой системе координат Ouv имеет вид

$$D' = \{(u, v): 1 \le u \le 9, -2 \le v \le 2\}$$

Тогда, пользуясь формулой замены переменных в двойном интеграле, находим

$$\iint\limits_D (x + y)dxdy = \iint\limits_{D'} (x + y) \cdot |J_1| dudv = \iint\limits_{D'} dudv = \int\limits_1^9 \left(\int\limits_{-2}^{2} dv \right) du = 32. \blacksquare$$

Задание 4 ***(8 баллов)***
Найти $x, y \in R$, удовлетворяющие системе уравнений
$$\begin{cases} 34x^2 - 22xy + 5y^2 = 98, \\ 16x^2 + 2xy - 3y^2 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(1, -2)$, $(3, 8)$, $(-3, -8)$, $(-1, 2)$.

Решение: Складывая уравнения, получаем
$$50x^2 - 20xy + 2y^2 = 98 \Longrightarrow (5x - y)^2 = 7^2.$$
Вычитая из первого второе, находим
$$18x^2 - 24xy + 8y^2 = 98 \Longrightarrow (3x - 2y)^2 = 7^2.$$
Тем самым, исходная система переписывается в виде
$$\begin{cases} (5x - y)^2 = 7^2, \\ (3x - 2y)^2 = 7^2. \end{cases}$$
Отсюда получаем 4 возможных случая
$$\begin{cases} 5x - y = 7, \\ 3x - 2y = 7, \end{cases} \begin{cases} 5x - y = 7, \\ 3x - 2y = -7, \end{cases} \begin{cases} 5x - y = -7, \\ 3x - 2y = 7, \end{cases} \begin{cases} 5x - y = -7, \\ 3x - 2y = -7. \end{cases}$$
Откуда находим 4 решения $(1, -2)$, $(3, 8)$, $(-3, -8)$, $(-1, 2)$. ■

Задание 5 ***(10 баллов)***
Вычислить предел последовательности ($a \in R - const$)
$$\lim_{n \to \infty} n^2 \cdot \left(\sqrt[n]{n + a^2} - \sqrt[n]{n} \right).$$

Ответ: a^2.

Решение:

а) При непосредственной подстановке получим $[\infty \cdot (\infty^0 - \infty^0)]$. Воспользуемся основным логарифмическим тождеством и преобразуем выражение под знаком предела:
$$(n + a^2)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{ln(n+a^2)}{n}} - e^{\frac{ln\, n}{n}} = e^{\frac{ln\, n}{n}} \cdot \left(e^{\frac{ln(n+a^2) - ln\, n}{n}} - 1 \right)$$
$$= e^{\frac{ln\, n}{n}} \cdot \left(e^{\frac{ln\left(1 + \frac{a^2}{n}\right)}{n}} - 1 \right).$$
С учетом того, что $e^t - 1 \sim t$ и $ln(1 + t) \sim t$ при $t \to 0$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \left(\sqrt[n]{n+a^2} - \sqrt[n]{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln n}{n}} \cdot \left(e^{\frac{\ln\left(1+\frac{a^2}{n}\right)}{n}} - 1\right)}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln\left(1+\frac{a^2}{n}\right)}{n}} - 1}{\frac{1}{n^2}} = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln\left(1+\frac{a^2}{n}\right)}{n}} - 1}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln\left(1+\frac{a^2}{n}\right)}{n}}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a^2}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^2}{n}}{\frac{1}{n}} = a^2.$$

б) гораздо быстрее

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \left(\sqrt[n]{n+a^2} - \sqrt[n]{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \left(\sqrt[n]{1+\frac{a^2}{n}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \left(1 + \frac{a^2}{n^2} - 1\right) = a^2. \blacksquare$$

Задание 6 ***(8 баллов)***

Найдите x, при котором $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ x & -8 & -4 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0.$

Ответ: $x = -15$.

Решение: Преобразуем определитель:

$$\Delta(x) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ x & -8 & -4 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Если из первого столбца вычесть остальные четыре, то получим:

$$\Delta(x) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ x+15 & -8 & -4 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Далее разложим определитель по первому столбцу, получим:

$$\Delta(x) = 2 \cdot (x+15) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Полученный определитель четвертого порядка имеет треугольный вид, а значит, равен произведению элементов по главной диагонали, т.е. единице.
Поэтому $\Delta(x) = 2 \cdot (x+15) = 0$, откуда получаем, что $x = -15$. ■

Задание 7 ***(12 баллов)***
Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2yy'' - 2x^2y'^2 + xyy' + y^2 = 0.$$

Ответ: $y = \frac{C_2x}{x^2 - C_1}$.

Решение: Используем свойство однородности уравнения относительно y, y', y'' и перейдем к новой функции $z(x)$: $y' = y \cdot z(x)$, $y'' = y(z^2 + z')$,

$$x^2y^2(z^2 + z') - 2x^2y^2z^2 + xy^2z + y^2 = 0 \Longrightarrow x^2z' - x^2z^2 + xz + 1 = 0.$$

Заметим

$$(xz)' = z + xz' \Longrightarrow x(xz)' - x^2z^2 + 1 = 0.$$

Сделаем замену $u(x) = xz$:

$$xu' - u^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \frac{u-1}{u+1} = \frac{x^2}{C_1} \Longrightarrow u = -\frac{x^2 + C_1}{x^2 - C_1}.$$

Возвращаемся к функции $z(x)$:

$$z = \frac{u}{x} = -\frac{x^2 + C_1}{x(x^2 - C_1)} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - C_1},$$

а затем и к $y(x)$:

$$\frac{dy}{y} = z(x)dx = \left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - C_1}\right)dx \Longrightarrow y = \frac{C_2x}{x^2 - C_1}. ■$$

Задание 8 ***(12 баллов)***
Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 2zy' = y^2 - z^2 + 1, \\ z' = z + y. \end{cases}$$

Ответ: $y = \frac{C_1}{2}(x + C_2) - \frac{1}{C_1} - \frac{C_1}{4}(x + C_2)^2, z = \frac{1}{C_1} + \frac{C_1}{4}(x + C_2)^2$.

Решение: Из второго уравнения выражаем $y = z' - z$ и подставляем в первое. Получаем
$$2z \cdot z'' - z'^2 - 1 = 0.$$
Порядок уравнения можно понизить, взяв за новую независимую переменную z, а за неизвестную функцию $z' = p(z)$,
Тогда
$$z'' = p\frac{dp}{dz},$$
и уравнение примет вид
$$2zp\frac{dp}{dz} - p^2 - 1 = 0.$$
Разделив переменные, получаем
$$\frac{2pdp}{p^2+1} = \frac{dz}{z} \Rightarrow ln(p^2+1) = ln(z \cdot C_1) \Rightarrow p = \pm\sqrt{C_1 z - 1}.$$
Далее
$$\frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{C_1 z - 1} \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{C_1 z - 1}} = \pm dx \Rightarrow z = \frac{1}{C_1} + \frac{C_1}{4}(x + C_2)^2.$$
Тогда
$$y = z' - z = \frac{C_1}{2}(x + C_2) - \frac{1}{C_1} - \frac{C_1}{4}(x + C_2)^2.$$

Задание 9 ***(9 баллов)***
Вычислить $y^{(21)}(0)$ для функции
$$y = e^{2x}\sin 2x.$$

Ответ: $y^{(21)}(0) = -2^{31}$.

Решение: Заметим, $y = Im\, e^{2x} \cdot e^{i\,2x} = Im\, e^{2x(1+i)}$.
Далее нетрудно найти производную
$$\left[e^{2x(1+i)}\right]^{(21)} = 2^{21}(1+i)^{21}e^{2x(1+i)} = 2^{21}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{21} e^{2x(1+i)} =$$
$$= 2^{21}\left(\sqrt{2}\right)^{21}\left(\cos\frac{21\pi}{4} + i\sin\frac{21\pi}{4}\right)e^{2x(1+i)} = -2^{31}(1+i)e^{2x(1+i)}.$$
Окончательно,
$$y^{(21)}(0) = Im\left[e^{2x(1+i)}\right]^{(21)}\Big|_{x=0} = -Im\, 2^{31}(1+i)e^{2x(1+i)}\Big|_{x=0} = -2^{31}. \blacksquare$$

Задание 10 ***(11 баллов)***

Сколько раз нужно бросить три игральных кубика, чтобы вероятность того, что хотя бы в одном из бросков выпадет комбинация с тремя одинаковыми числами (например, 1−1−1, 2−2−2 и т.д.), стала больше заданного числа *p*, где 0< *p* <1? Сколько потребуется подбрасываний, если *p* = 0.5?

Ответ: $n > \frac{ln(1-p)}{ln\left(\frac{35}{36}\right)}$; $n|_{p\,=\,0.5} = 25$.

Решение:

Шаг 1. Определим вероятность выпадения трех одинаковых цифр за одно подбрасывание. Каждый игральный кубик имеет 6 граней, поэтому всего возможных исходов при подбросе трех кубиков: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$.
Из этих 216 исходов, случаев, когда выпадают три одинаковые цифры (1–1–1, 2–2–2, ..., 6–6–6), ровно 6. Таким образом, вероятность того, что при одном подбрасывании выпадут три одинаковые цифры, равна:

$$\mathrm{P}(\text{все три одинаковые}) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

Следовательно, вероятность того, что выпавшие цифры будут различными или не все одинаковыми, равна:

$$\mathrm{P}(\text{не все три одинаковые}) = 1 - \mathrm{P}(\text{все три одинаковые}) = \frac{35}{36}.$$

Шаг 2. Найдем вероятность того, что за n подбрасываний не выпадет ни одной тройки одинаковых цифр. Если мы подбрасываем три кубика n раз, то событие «не выпало ни одной тройки одинаковых цифр» означает, что на каждом из n подбрасываний выпали различные цифры или не все были одинаковыми. Поскольку каждый подброс независим от других, вероятность этого события равна:

$$\mathrm{P}(\text{нет троек одинаковых за } n \text{ подбрасываний}) = \left(\frac{35}{36}\right)^n.$$

Шаг 3. Вычислим вероятность того, что выпадет хотя бы одна тройка одинаковых цифр как вероятность противоположного события («хотя бы одна тройка одинаковых цифр выпала»):

$$\mathrm{P}(\text{хотя бы одна тройка одинаковых за } n \text{ подбрасываний}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n.$$

Шаг 4. Найдем минимальное значение n, при котором полученная вероятность будет больше заданного $p \in (0,1)$:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > p \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{35}{36}\right)^n < 1 - p \quad \Rightarrow \quad n\, ln\left(\frac{35}{36}\right) < ln(1-p) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad n > \frac{ln(1-p)}{ln\left(\frac{35}{36}\right)}.$$

Таким образом, ответом будет минимальное натуральное n, удовлетворяющее условию

$$n > \frac{ln(1-p)}{ln\left(\frac{35}{36}\right)}.$$

Так, при $p = 0.5$ получим:

$$n > \frac{ln(1-0.5)}{ln\left(\frac{35}{36}\right)} = \frac{ln\,0.5}{ln\left(\frac{35}{36}\right)} = \frac{-0,69314718}{-0,02817088} = 24.6,$$

следовательно, потребуется 25 подбрасываний, чтобы вероятность выпадения в одном из бросков комбинации с тремя одинаковыми числами стала больше 0.5. ■
