ТРЕТЬЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
БЛАГОВЕЩЕНСК – РОССИЯ, 25 марта 2023 г.

THE THIRD INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
Blagoveshchensk – Russia, 25 March 2023

第三届国际数学奥林匹克竞赛
布拉戈维申斯克-俄罗斯，2023年3月25日

Формулировки задач и решения

Задание 1 ***(8 баллов)***

Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 2, \quad y_1 = 1; \ x_2 = 1, \ y_2 = -1.$

Решение:

Умножим первое уравнение на y, второе – на x, и сложим:

$$(1) \cdot y + (2) \cdot x \quad \Rightarrow \quad 2xy - 1 = 3y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2x - 3}.$$

Далее умножим первое уравнение на x, второе – на y, и вычтем:

$$(1) \cdot x - (2) \cdot y \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 + 3 = 3x.$$

Тогда получим:

$$x^2 - 3x + 3 = \frac{1}{(2x - 3)^2} \quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2};$$

$$t = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 4t^2 + 3t - 1 = 0, \ D = 9 + 16 = 25;$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{8} \Rightarrow t = \frac{1}{4}.$$

Окончательно находим решение:

$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, \ x_2 = 1, \ y_1 = 1, \ y_2 = -1.$$

Задание 2 ***(10 баллов)***

К графику функции $y = -(x^2/12) + x - 16/3$ проведена касательная, пересекающая график функции $y = 3|x+6| - 7/3$ в точках A и B. Найти радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках A, B и $C(-6;\ -7/3)$, если $\angle CAB = 2arccos\left(3/\sqrt{10}\right) + \angle CBA$.

Ответ: $R = 13\sqrt{10}/16$

Решение:

Consider ΔABC, note $\angle ACB = 2arccos\left(3/\sqrt{10}\right) \Rightarrow \angle CAB = 90^0$.

Let 's make the equation of the tangent to the parabola:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\cdot(x - x_0),\ \ y'(x_0) = -\frac{x_0}{6} + 1 = -\frac{1}{3} \ \Rightarrow\ x_0 = 8,\ y(x) = -\frac{1}{3}x.$$

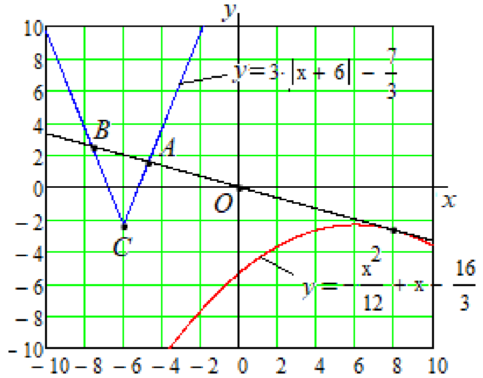
Determine the coordinates of the point B:

$$y_B = -3(x_B+6) - \frac{7}{3},\ \ y_B = -\frac{1}{3}x_B \ \Rightarrow\ x_B = -\frac{61}{8},\ y_B = \frac{61}{24}.$$

Далее, диаметр описанной окружности совпадает с гипотенузой BC:

$$2R = BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-6 + \frac{61}{8}\right)^2 + \left(-\frac{7}{3} - \frac{61}{24}\right)^2} = \frac{13\sqrt{10}}{8}.$$



Задание 3 ***(9 баллов)***

Матрицы $A_{3\times2}$ и $B_{2\times3}$ таковы, что

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу BA.

Ответ: $BA = 9E$, где E – единичная матрица размерами 2×2.

Решение:

Пусть $A'_{2\times3}$ – матрица, такая, что $A'A = E$ и $B'_{3\times2}$ – матрица, такая, что $BB' = E$, где E – единичная матрица размера 2×2. Нетрудно показать, что такие матрицы A' и B' существуют, причем не единственные. Действительно, например, чтобы найти матрицу типа A' достаточно рассмотреть квадратную неособую матрицу $\bar{A}$, полученную из матрицы A добавлением подходящего третьего столбца, найти обратную к ней матрицу A^{-1} и удалить в последней третью строку. Аналогично получим матрицу B'.

Далее заметим, что $(AB)\cdot(AB) = 9(AB)$. Умножая обе части этого равенства слева на A', а справа на B', получаем

$$A'\cdot(AB)\cdot(AB)\cdot B' = 9A'\cdot(AB)\cdot B' \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (A'A)\cdot(BA)\cdot(BB') = 9(A'A)\cdot(BB') \Longrightarrow\ BA = 9E.$$

Задание 4 ***(11 баллов)***

Найти общее решение или общий интеграл уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{y^3 + x^2y + x^2}.$$

Ответ: $y^2e^{2y} = C(x^2 + y^2)$ – общий интеграл.

Решение:

а)

$$(y^3 + x^2y + x^2)dy = xydx \quad \Longrightarrow \quad x(ydx - xdy) = y(x^2 + y^2)dy \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x}dy \quad \Longrightarrow \quad -d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}dy \quad \Longrightarrow \quad -d(\operatorname{arctg} z) = zdy, \quad z = \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow -\frac{d(\operatorname{arctg} z)}{z} = dy \Longrightarrow -\frac{dz}{z(1+z^2)} = dy \Longrightarrow y = -\int\frac{dz}{z} + \int\frac{zdz}{1+z^2} + \tilde{C} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y = -\ln|z| + \frac{1}{2}\ln|1+z^2| + \tilde{C} \Longrightarrow z^2 = (1+z^2)Ce^{-2y} \Longrightarrow y^2e^{2y} = C(x^2+y^2).$$

б)

$$(y^3 + x^2y + x^2)dy = xydx \quad \Longrightarrow \quad x(ydx - xdy) = y(x^2 + y^2)dy \quad \Longrightarrow \quad \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x}dy \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{-d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{y}{x}dy, \quad z = \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{dz}{z(1+z^2)} = dy \quad \Longrightarrow \quad y = -\int\frac{dz}{z} + \int\frac{zdz}{1+z^2} + C \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad y = -\ln|z| + \frac{1}{2}\ln|1+z^2| + C \Longrightarrow z^2 = (1+z^2)Ce^{-2y} \Longrightarrow y^2e^{2y} = C(x^2+y^2).$$

Задание 5 ***(10 баллов)***

Найти предел суммы:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right).$$

Ответ: $\ln 2$.

Решение:

Обозначим

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{1}{n},\;\; x_k = k\Delta x = \frac{k}{n},$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+x_1}\cdot\Delta x+\frac{1}{1+x_2}\cdot\Delta x+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\cdot\Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}\cdot\Delta x_k =$$

$$= \int_0^1\frac{dx}{1+x} = ln(1+x)|_0^1 = \ln 2.$$

<u>Задание 6</u> (11 баллов)

Последовательность $\{u_n\}$ задана рекуррентно:

$$u_0 = 1,\;\; u_1 = 2,\;\; u_2 = 4,\qquad u_{n+1} = u_{n-2} + 2u_{n-1} + u_n,\qquad n \geq 2.$$

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{10^n}.$$

Ответ: $1100/879$

Решение: Обозначим S – сумма ряда. Находим

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{10^n} = u_0 + \frac{u_1}{10} + \frac{u_2}{10^2} + \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{u_n}{10^n} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{4}{10^2} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{u_{n+1}}{10^{n+1}} =$$

$$= \frac{124}{10^2} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{u_{n-2}+2u_{n-1}+u_n}{10^{n+1}} = \frac{124}{10^2} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{u_{n-2}}{10^{n+1}} + 2\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{u_{n-1}}{10^{n+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{u_n}{10^{n+1}} =$$

$$= \frac{124}{10^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{10^{n+3}} + 2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{10^{n+2}} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{u_n}{10^{n+1}} =$$

$$= \frac{124}{10^2} + \frac{1}{10^3}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{10^n} + \frac{2}{10^2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{10^n} + \frac{1}{10}\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{u_n}{10^n} =$$

$$= \frac{124}{10^2} + \frac{1}{10^3}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{10^n} + \frac{2}{10^2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{10^n} - u_0\right) + \frac{1}{10}\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{10^n} - u_0 - \frac{u_1}{10}\right) =$$

$$= \frac{124}{10^2} + \frac{1}{10^3}\cdot S + \frac{2}{10^2}\cdot(S-1) + \frac{1}{10}\cdot\left(S - 1 - \frac{2}{10}\right) =$$

$$= \frac{124}{10^2} + \frac{1}{10^3}\cdot S + \frac{2}{10^2}\cdot S - \frac{2}{10^2} + \frac{1}{10}\cdot S - \frac{1}{10} - \frac{2}{10^2}.$$

Тогда получаем

$$\left(1-\frac{1}{10^3}-\frac{2}{10^2}-\frac{1}{10}\right)\cdot S=\frac{124}{10^2}-\frac{2}{10^2}-\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}.$$

$$\frac{879}{10^3}\cdot S=\frac{110}{10^2};\quad S=\frac{110}{10^2}\cdot\frac{10^3}{879}=\frac{1100}{879}.$$

Задание 7 ***(9 баллов)***

Четыре участника по очереди бросают монету, на которой каждый раз с одинаковой вероятностью 0,5 выпадает «орел» или «решка». Выигрывает тот участник, у которого впервые выпадает «орел». Определить вероятность выигрыша каждого из участников.

Ответ: 8/15, 4/15, 2/15, 1/15.

Решение:

Первый участник имеет возможность выиграть:
- при первом подбрасывании с вероятностью $0{,}5$;
- при пятом подбрасывании с вероятностью $(0{,}5)^5$ (первые четыре подбрасывания должны быть неудачными),
- при девятом подбрасывании с вероятностью $(0{,}5)^9$ и т.д.

Все это несовместные события, поэтому общая вероятность $P(A_1)$ выигрыша первого участника:

$$P(A_1)=0{,}5+(0{,}5)^5+(0{,}5)^9+\cdots=0{,}5\cdot\frac{1}{1-(0{,}5)^4}=\frac{8}{15}.$$

Аналогично, второй участник имеет возможность выиграть:
- при втором подбрасывании с вероятностью $(0{,}5)^2$ (первое подбрасывание первого участника должно быть неудачным);
- при шестом подбрасывании с вероятностью $(0{,}5)^6$ и т.д.

Общая вероятность $P(A_2)$ выигрыша второго участника:

$$P(A_2)=(0{,}5)^2+(0{,}5)^6+(0{,}5)^{10}+\cdots=(0{,}5)^2\cdot\frac{1}{1-(0{,}5)^4}=\frac{4}{15}.$$

Аналогично,

$$P(A_3)=\frac{2}{15},\qquad P(A_4)=\frac{1}{15}.$$

Задание 8 ***(13 баллов)***

Вычислить определенный интеграл:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos^2 x)^2}\qquad (a>0,b>0).$$

Ответ: $\frac{\pi(2a+b)}{[a(a+b)]^{3/2}}$.

Решение:

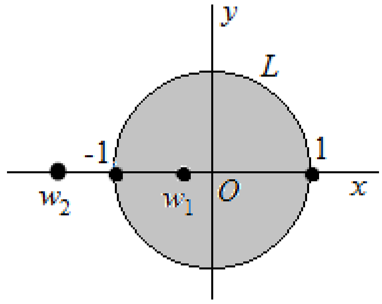
Вычисление исходного действительного интеграла сводим к вычислению контурного интеграла в комплексной плоскости:

$$z=e^{ix},\ \ dz=ie^{ix}dx=izdx,\quad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},\ \ L=\{z:|z|=1\};$$

$$I=\oint_L \frac{dz}{iz\left(a+b\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2\right)^2}=-16i\oint_L \frac{z^3dz}{(bz^4+2(2a+b)z^2+b)^2}=$$

$$=-\frac{8i}{b^2}\oint_L \frac{z^2d(z^2)}{\left(z^4+2\left(2\frac{a}{b}+1\right)z^2+1\right)^2}=\left(\begin{gathered}w=z^2;\\ L=\{w:|w|=1\}-double;\\ \alpha=2\frac{a}{b}+1>1\end{gathered}\right)=$$

$$=-\frac{16i}{b^2}\oint_L \frac{wdw}{(w^2+2\alpha w+1)^2}.$$



Определяем особые точки, попадающие во внутреннюю область замкнутого контура L:

$$D_0=\alpha^2-1>0;\ \ w_1=-\alpha+\sqrt{D_0}>-1;$$

$$w_2=-\alpha-\sqrt{D_0}<-1.$$

Используем интегральную формулу Коши:

$$I=-\frac{16i}{b^2}\oint_L \frac{wdw}{(w-w_1)^2(w-w_2)^2}=\left(f(w)=\frac{w}{(w-w_2)^2}\right)=-\frac{16i}{b^2}\oint_L \frac{f(w)dw}{(w-w_1)^2}=$$

$$=-\frac{16i}{b^2}2\pi i f'(w_1)=\frac{32\pi}{b^2}f'(w_1);$$

$$f'(w)=-\frac{w+w_2}{(w-w_2)^3}\Rightarrow f'(w_1)=-\frac{w_1+w_2}{(w_1-w_2)^3}=\frac{2\alpha}{\left(2\sqrt{D_0}\right)^3}.$$

Окончательно получаем

$$I=\frac{32\pi}{b^2}\frac{2\alpha}{\left(2\sqrt{D_0}\right)^3}=\frac{8\pi}{b^2}\frac{\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}}=\frac{\pi(2a+b)}{[a(a+b)]^{3/2}}.$$

Задание 9 ***(10 баллов)***

Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases}\ddot{x}-2\dot{x}-2x-\ddot{y}+4\dot{y}=0,\\ 2\dot{x}+x-\ddot{y}-4\dot{y}+2y=0.\end{cases}$$

Ответ: $x=C_1e^t+5C_2e^{-t}+2C_3e^{2t}+2C_4e^{-2t},\ y=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3e^{2t}+C_4e^{-2t}$.

Решение:

а) Составляя сумму уравнений системы, получаем уравнение для новой функции $z(t)$:

$$z=2y-x,\qquad \ddot{z}-z=0\ \Rightarrow\ z=C_1e^t+C_2e^{-t}\ \Rightarrow\ x=2y-C_1e^t-C_2e^{-t}.$$

Подставляя $x(t)$ в одно из уравнений системы, получаем уравнение для $y(t)$:

$$\ddot{y}-4y=-3C_1e^t+C_2e^{-t}.$$

Находим общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения:

$$\bar{y} = C_3 e^{2t} + C_4 e^{-2t}.$$

Находим частное решение y^* неоднородного уравнения:

$$y^* = C_1 e^t - \frac{C_2}{3} e^{-t}.$$

Находим общее решение y неоднородного уравнения:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^t - \frac{1}{3} C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} + C_4 e^{-2t}.$$

Подставляем в выражение для x:

$$x = C_1 e^t - \frac{5}{3} C_2 e^{-t} + 2C_3 e^{2t} + 2C_4 e^{-2t}.$$

Переобозначив C_2, окончательно получаем

$$x = C_1 e^t + 5C_2 e^{-t} + 2C_3 e^{2t} + 2C_4 e^{-2t}, \qquad y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} + C_4 e^{-2t}.$$

б) Решение ищем решение в виде:

$$x = Ae^{kt}, \qquad y = Be^{kt}.$$

Подставляем в систему и после сокращения на e^{kt} ищем ненулевые решения для A, B:

$$A(k^2 - 2k - 2) + B(-k^2 + 4k) = 0,$$
$$A(2k + 1) + B(-k^2 - 4k + 2) = 0.$$

Получаем характеристическое уравнение, находим корни:

$$(k^2 - 2k - 2)(-k^2 - 4k + 2) - (-k^2 + 4k)(2k + 1) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow k^4 - 5k^2 + 4 = 0 \Longrightarrow (k^2 - 1)(k^2 - 4) = 0 \Longrightarrow k_{1,2} = \pm 1, \; k_{3,4} = \pm 2.$$

Находим соответствующие коэффициенты подобия:

$$k_1 = 1 \Longrightarrow -3A + 3B = 0 \Longrightarrow A_1 = 1, \qquad B_1 = 1;$$
$$k_2 = -1 \Longrightarrow A - 5B = 0 \Longrightarrow A_2 = 5, \qquad B_2 = 1;$$
$$k_3 = 2 \Longrightarrow -2A + 4B = 0 \Longrightarrow A_3 = 2, \qquad B_3 = 1;$$
$$k_4 = -2 \Longrightarrow 6A - 12B = 0 \Longrightarrow A_4 = 2, \qquad B_4 = 1.$$

Составляем решение исходной системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

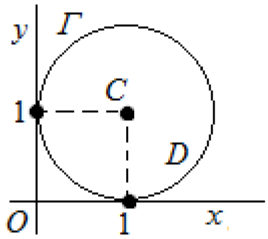
Задание 10 ***(9 баллов)***

Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_{\Gamma} \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}, \quad \Gamma = \{(x, y): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\}.$$

Ответ: 0.

Решение:



а) Используем формулу Грина

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,, \qquad P = \frac{y}{x^2+y^2}\,, \qquad Q = \frac{x}{x^2+y^2}\,.$$

Область D представляет собой круг и в полярных координатах ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) задается ограничениями:

$$D = \left\{(r,\varphi): 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ \ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\right\}$$

$$r_1(\varphi) = \cos\varphi + \sin\varphi - \sqrt{\sin 2\varphi}\,, \qquad r_2(\varphi) = \cos\varphi + \sin\varphi + \sqrt{\sin 2\varphi}$$

Из этих соображений

$$\int_\Gamma \frac{xdy + ydx}{x^2+y^2} = -2\iint_D \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy = -2\iint_D (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) r dr d\varphi =$$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi\, d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi\, d\varphi \left.\frac{r^2}{2}\right|_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} =$$

$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi\,(\cos\varphi + \sin\varphi)\sqrt{\sin 2\varphi}\,d\varphi = -4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\sin 2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \left(\theta = \varphi - \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right) = -4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\theta \cos\theta \sqrt{\cos 2\theta}\, d\theta = 0,$$

ввиду нечётности подынтегральной функции на симметричном интервале.

б) Вычисляем непосредственно. Рассмотрим параметризацию контура Γ:

$$x = 1 + \cos t\,, \qquad y = 1 + \sin t\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Далее

$$dx = -\sin t\ dt, \qquad dy = \cos t\ dt$$

и подставляем все в интеграл:

$$\int_\Gamma \frac{xdy + ydx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos t)\cos t - (1+\sin t)\sin t}{(1+\cos t)^2 + (1+\sin t)^2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos t + \sin t)(\cos t - \sin t)}{3 + 2(\cos t + \sin t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + (\cos t + \sin t)}{3 + 2(\cos t + \sin t)} d(\cos t + \sin t) =$$

$$= \begin{pmatrix} u = \cos t + \sin t\,, \\ t = 0 \Rightarrow u = 1, \\ t = 2\pi \Rightarrow u = 1 \end{pmatrix} = \int_1^1 \frac{1+u}{3+2u} du = 0.$$