

Пак Николай Михайлович

**Математические модели и вычислительные алгоритмы для
оценки характеристик процедуры лазерной абляции**

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Амурский государственный университет» и Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Дальневосточный федеральный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Ковтаниук Андрей Егорович

Официальные оппоненты:

Ведущая организация:

Защита состоится на заседании диссертационного совета при по адресу: .

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке .

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: , ученому секретарю диссертационного совета .

Автореферат разослан 2024 года.

Телефон для справок: .

Ученый секретарь
диссертационного совета

,

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Лазерная абляция является перспективным, относительно малоинвазивным и безопасным способом лечения различных заболеваний. Подходы, основанные на использовании лазерной абляции, применяются в различных медицинских областях, включая офтальмологию, общую хирургию, нейрохиргию, оториноларингологию, стоматологию, челюстно-лицевую хирургию и ветеринарию. Лазерную хирургию можно использовать для абляции (удаления) доброкачественных и злокачественных новообразований в различных органах. Основные применения лазерной абляции в настоящее время включают уменьшение или удаление доброкачественных узлов щитовидной железы, миомы, фиброаденомы груди, доброкачественной гиперплазии предстательной железы и злокачественных новообразований почки, печени, мягких тканей, груди, простаты, легких, головного мозга, головы и шеи. Лазерная абляция также используется для лечения хронической венозной недостаточности, в частности варикозного расширения вен. Варикозное расширение вен является распространенной проблемой, которую обычно лечат с помощью операции. В качестве альтернативы хирургическому вмешательству были разработаны минимально инвазивные методы в попытке снизить риски возможных осложнений и сократить время восстановления. В 1999 г. появилось первое сообщение о клиническом внутрисосудистом применении лазера с длиной волны 810 нм для осуствления внутривенной лазерной (ВВЛА).

Наряду с внутривенной лазерной абляцией также достаточно эффективным малоинвазивным способом лечения варикоза является радиочастотная абляция (РЧА). В работе группы ученых-медиков (Ahadiat O. и др.) на основе различных исследований проводится сравнение лазерной и радиочастотной абляции по пяти критериям, включающим эффективность, побочные эффекты, серьезные осложнения, рецидив и качество жизни. ВВЛА, по данным многочисленных исследований, более эффективна, чем РЧА по некоторым критериям. Профили побочных эффектов варьировали в отношении послеоперационной боли и кровоподтеков, поскольку было замечено, что и то, и другое было значительно меньше при использовании РЧА. Было обнаружено, что серьезные осложнения были редкими в обоих случаях без существенной разницы в частоте. Скорость реканализации была выше при использовании РЧА с неопределенностью значимости среди различных исследований. Качество жизни улучшилось после обеих процедур без существенной разницы между ними. Вероятную причину, по которой ВВЛА приводит к большей послеоперационной боли, чем РЧА, объясняют результаты экспериментов Malskat W.S.J., согласно которым лазерная абляция характеризуется более высокой пиковой температурой, хотя и в течение короткого промежутка времени, тогда как у радиочастотной абляции более низкие, хотя и более продолжительные, максимальные температуры.

Поскольку большинство побочных эффектов при проведении ВВЛА незначительны, а серьезные осложнения редки, ВВЛА представляет собой

безопасную и минимально инвазивную процедуру, обладающую высокой эффективностью в лечении варикозной болезни.

Механизм проведения ВВЛА следующий: лазерное оптоволокно вводится в поврежденную вену, далее оптоволокно вытягивается из вены, при этом по нему передается лазерное излучение. Торец оптоволоконка, из которого выходит излучение, обычно покрыт карбонизированным слоем, который разделяет поступающую энергию, в результате чего одна ее часть поглощается карбонизированным слоем, что вызывает его нагрев, другая часть идет на излучение. Тепло от нагретого карбонизированного слоя передается в кровь посредством кондуктивного теплообмена. Теплообмен многократно усиливается за счет потока пузырьков, образующихся на разогретом торце оптоволоконка. Излучение, поступающее в кровь и окружающую ткань, частично поглощается, что сопровождается выделением тепла. В итоге образованная и поступившая за счет различных механизмов тепловая энергия вызывает значительный нагрев вены, что приводит к ее облитерации (закрытию сосуда).

Оптимизация параметров излучения при проведении ВВЛА позволяет осуществить успешную облитерацию вены с минимальной частотой и тяжестью осложнений. Для этого оптимальное излучение, с одной стороны, должно обеспечивать достаточно высокую температуру внутри вены для осуществления облитерации, с другой стороны, сгенерированное температурное поле должно быть относительно безопасным для окружающей вену ткани. Основными параметрами, влияющими на эффективность и безопасность процедуры лазерной абляции, являются мощность лазера, длина волны лазерного излучения, скорость движения оптоволоконка, соотношение долей мощности лазера, идущих на излучение и на нагрев наконечника (карбонизированного слоя) оптоволоконка. Как правило, при проведении лазерной абляции используется лазер с длиной волны от 810 до 1940 нм. Достаточно распространенными являются диапазоны скорости движения оптоволоконка от 1 до 3 мм/с и мощности лазерного излучения от 10 до 15 Вт.

Математическое моделирование радиационных и тепловых процессов, возникающих при проведении ВВЛА, является весьма актуальным в контексте определения оптимальных параметров излучения, обеспечивающих заданное распределение температуры внутри вены и в перивенозной ткани.

В трудах Тучина В. В. описывается классическая модель взаимодействия оптического излучения с биологической тканью, которая представляет собой систему двух дифференциальных уравнений, включающую уравнение переноса излучения и уравнение теплопроводности. Соответственно, расчет радиационных и температурных полей включает в себя нахождение решения уравнения переноса, вычисление по нему объемной плотности поглощенной энергии излучения и последующее нахождение решения уравнения теплопроводности, в которое поглощенная энергия излучения входит в качестве источников тепла.

Нередко при решении различных задач переноса излучения учитываются эффекты отражения и преломления на границах раздела сред с различными показателями преломления, что достаточно хорошо моделируется методом Монте-Карло. Модели радиационно-кондуктивного теплопереноса, основанные на интегродифференциальном уравнении переноса и уравнении теплопроводности, с граничными условиями отражения-преломления, достаточно хорошо изучены в работах Амосова А.А.

Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю., Гренкин Г.В., Ботникин Н.Д. и Hoffmann К.-Н. в своих работах по сложному (радиационно-кондуктивному) теплообмену с целью упрощения модели заменяют уравнение переноса излучения на его диффузионное приближение, которое также позволяет описывать эффекты отражения и преломления. В дополнении к этому диффузионная модель может учитывать тепловое излучение, индуцированное самой средой (излучение черного тела), что приводит к нелинейной модели сложного теплообмена. Отметим, что в их работах также исследовались обратные экстремальные задачи для диффузионной модели радиационно-кондуктивного теплообмена.

Процесс ВВЛА хорошо описывается диффузионной моделью радиационно-кондуктивного теплообмена с движущимися источниками тепла и радиации. Основными эффектами, которые обычно учитываются при моделировании ВВЛА, являются кондуктивный теплообмен, перенос излучения и его поглощение с выделением тепла, а также перенос тепла потоком пузырьков, образующихся на наконечнике оптоволокна. В частности, в работе группы исследователей (Boer A. и др.) приведены результаты экспериментов, демонстрирующих влияние движущихся пузырьков, образованных на наконечнике оптоволокна, на температурное поле. В работах группы ученых Poluektova A. A., Malskat W. S. J., van Ruijven P. W. M., на основе оценки экспериментальных данных перенос тепла потоком пузырьков моделируется использованием кусочно-постоянного коэффициента теплопроводности, зависящего от температуры следующим образом: при достижении температуры в некоторой точке подобласти, заполненной кровью, 95°C и более коэффициент теплопроводности увеличивается в 200 раз. Также приведены результаты численного моделирования ВВЛА для длин волн непрерывного излучения в диапазоне от 810 до 1470 нм и различных диаметров вен. В них, в частности, оценка эффективности лазерной абляции осуществляется через анализ температурных профилей в точках наблюдения, находящихся в различных зонах вычислительной области (кровь, внутренняя и внешняя стенки вены, перивенозная ткань). Отметим, что в указанных работах усредненная интенсивность излучения вычисляется по явной формуле, описывающей радиационное поле точечного источника в неограниченной однородной среде.

Mordon S. подчеркивал важность численного моделирования при выборе оптимальной мощности лазерного излучения для различных длин волн лазерного излучения и различных диаметров вен. В своей работе он проводит

сравнительный численный анализ эффективности ВВЛА в случае непрерывного и импульсного (с продолжительностью импульса от 1 до 3 с) излучения с длиной волны 810 и 980 нм. Отмечается эффективность обоих подходов. И хотя импульсное излучение обеспечивает несколько меньший нагрев ткани, его использование требует точного позиционирования волокна и большую продолжительность операции.

Отметим, что в работах Mordon S., Poluektova, A. A., Malskat W. S. J., van Ruijven P. W. M. при выборе оптимальных параметров излучения используют прямое многократное моделирование, осуществляющее по сути перебор различных вариантов с целью поиска некоторого оптимального решения. Данный подход не является эффективным. К тому же остаются без ответа вопросы, связанные с существованием оптимального решения и обоснованием сходимости соответствующих вычислительных алгоритмов. Наиболее перспективным подходом к выбору оптимальных параметров излучения является рассмотрение задачи оптимизации для уравнений типа реакция-диффузия, описывающих процедуру лазерной абляции.

Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю. предложили подход, заключающийся в решении задачи оптимального управления для подбора параметров излучения с целью приблизить температурный профиль в определенной точке модельной области к заданному графику, характеристики которого (максимальная температура и продолжительность кипения) обеспечивают успешное проведение процедуры ВВЛА. Предложенный подход позволил также авторам решить задачу оптимального управления, которая определяет характеристики процедуры ВВЛА, обеспечивающие температурное поле, с одной стороны, безопасное для окружающей ткани, с другой стороны, достаточное для облитерации вены. Диссертация является продолжением исследования начально-краевых и обратных экстремальных задач для моделей внутривенной лазерной абляции на основе P1-приближения моделей радиационно-кондуктивного теплообмена.

Целью диссертационной работы является разработка математического, алгоритмического и программного обеспечения для численной реализации моделей радиационно-кондуктивного теплообмена, описывающих процесс внутривенной лазерной абляции.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить **задачи**:

1. Формализовать начально-краевые и обратные экстремальные задачи для модели внутривенной лазерной абляции.
2. Разработать алгоритмы решения начально-краевых и обратных экстремальных задач для моделей внутривенной лазерной абляции.
3. Обосновать сходимость алгоритмов решения начально-краевых и обратных экстремальных задач для моделей внутривенной лазерной абляции.
4. Разработать программное обеспечение для решения начально-краевых и обратных экстремальных задач для моделей внутривенной лазерной абляции.

Научная новизна:

1. Разработаны вычислительные алгоритмы решения начально-краевых задач для моделей внутривенной лазерной абляции.
2. Обоснована сходимость вычислительных алгоритмов решения начально-краевых задач для моделей внутривенной лазерной абляции.
3. Разработаны вычислительные алгоритмы решения задач оптимального управления для моделей внутривенной лазерной абляции.
4. Обоснована сходимость вычислительных алгоритмов решения задач оптимального управления для моделей внутривенной лазерной абляции.
5. Разработаны прикладные программы для проведения вычислительных экспериментов по внутривенной лазерной абляции.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в развитии оптимизационного подхода исследования процесса внутривенной лазерной абляции, основанного на использовании численных методов. Разработанные в работе алгоритмы могут использоваться как для решения начально-краевых задач, так и для решения обратных экстремальных задач для моделей внутривенной лазерной абляции.

Результаты проведенного научного исследования могут быть полезны при реализации образовательных программ в рамках группы специальностей 1.1 Математика и механика и 1.2 Компьютерные науки и информатика.

Методология и методы исследования. При исследовании уравнений сложного теплообмена и анализе задач оптимизации применялись методы функционального анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории экстремальных задач. При разработке и тестировании численных алгоритмов применялись методы вычислительной математики, методы оптимизации и вычислительный эксперимент.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Сходимость итерационных алгоритмов для решения начально-краевых задач для моделей внутривенной лазерной абляции.
2. Однозначная разрешимость начально-краевых задач для моделей внутривенной лазерной абляции.
3. Разрешимость обратных экстремальных задач для моделей внутривенной лазерной абляции.
4. Сходимость итерационных алгоритмов для решения обратных экстремальных задач для моделей внутривенной лазерной абляции.
5. Разработанный набор программ для ЭВМ, предназначенный для подбора оптимальных характеристик процедуры ВВЛА.

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением строгих математических доказательств и верификацией построенных алгоритмов на

задачах с известными решениями. Результаты, полученные в диссертационной работе, согласуются с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены на: Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, Владивосток, 15–30 апреля 2021, Международной конференции Дни Дифракции, Санкт-Петербург, 31 мая – 4 июня 2021, Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, Владивосток, 15–30 апреля 2022, Научно-практической конференции на английском языке студентов и аспирантов по естественным наукам, Владивосток, 25–31 мая 2021, Международной конференции Дни Дифракции, Санкт-Петербург, 30 мая – 3 июня 2022, I Международном семинаре «Вычислительные технологии и прикладная математика» (International Workshop on Computing Technologies and Applied Mathematics), 11–15 июля 2022, Международной конференции Дни Дифракции, Санкт-Петербург, 5 – 9 июня 2023, II Международном семинаре «Вычислительные технологии и прикладная математика», 12–16 июня 2023, VI Международной научно-практической конференции «Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления», Хабаровск, 11–13 сентября 2023.

Личный вклад. Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором лично или в соавторстве, при его непосредственном участии. Выбор направлений исследований, постановка задач математического моделирования, разработка численных алгоритмов решения задач ВВЛА, анализ результатов осуществлены совместно с научным руководителем. Реализация разработанных численных алгоритмов в виде программ ЭВМ, вычислительные эксперименты проведены автором самостоятельно.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 15 научных работах, из них 3 статьи – в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России; 5 статей – в изданиях, индексируемых международными базами научного цитирования Scopus и Web of Science; 7 публикаций – в сборниках материалов и тезисов конференций. Получено 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Связь работы с научными темами и программами. Результаты диссертационной работы частично поддержаны Минобрнауки РФ (проект № 122082400001-8 и соглашение № 075-02-2022-880).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 1 приложения. Полный объём диссертации составляет 90 страниц, 27 рисунков и 5 таблиц. Список литературы содержит 75 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана

теоретическая и практическая значимость полученных результатов, представленные выносимые на защиту научные положения.

В первой главе рассмотрена модель радиационно-кондуктивного теплообмена, описывающая перенос тепла и радиации в некоторой среде и учитывающая излучение черного тела в предположении «серой среды», то есть когда радиационные характеристики не зависят от длины волны. Исходная классическая модель представляет собой систему двух дифференциальных уравнений: интегродифференциального уравнения переноса излучения и уравнения теплопроводности. Строится диффузионное приближение для модели радиационно-кондуктивного теплообмена, а также для граничных условий. В итоговой реакционно-диффузионной системе функции источников и диффузионный коэффициент адаптированы для моделирования процесса ВВЛА. Диффузионное приближение для модели ВВЛА, учитывающее излучение черного тела, имеет следующий вид:

$$a \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (k(\theta) \nabla \theta) + b(\theta |\theta^3| - \varphi) = f, \quad (1)$$

$$- \nabla \cdot (\alpha \nabla \varphi) + \beta(\varphi - \theta |\theta^3|) = g, \quad (2)$$

$$\alpha \partial_{\mathbf{n}} \varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0, \quad k \partial_{\mathbf{n}} \theta + \lambda(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

$$\theta(r, 0) = \theta_0. \quad (4)$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения, α – коэффициент диффузии оптического излучения, $\alpha = (3\mu - A\mu_s)^{-1}$, $A \in [-1; 1]$ описывает анизотропию рассеяния, $\mu = \mu_a + \mu_s$ – коэффициент полного взаимодействия, $\beta = \mu_a$ – коэффициент поглощения излучения (доля излучения, поглощенная веществом на единице длины пути), μ_s – коэффициент рассеяния (доля излучения, рассеянного веществом на единице длины пути), a – произведение удельной теплоемкости на плотность среды, λ – коэффициент теплопередачи, $b = 4\sigma n^2 \mu_a T_c^3$, σ – постоянная Стефана – Больцмана, n – показатель преломления, $\gamma = \varepsilon / (2(2 - \varepsilon))$, $\varepsilon \in [0, 1]$, $\varepsilon(r)$ – коэффициент, описывающий излучающие свойства границы среды, f и g описывают вклад источников тепла и излучения соответственно. через $\partial_{\mathbf{n}}$ обозначена производная по направлению внешней нормали \mathbf{n} к границе Γ

Вторая глава посвящена анализу начально-краевых задач радиационно-кондуктивного теплообмена с нелинейным (диффузионным) членом, а также модели, учитывающих и не учитывающих излучение черного тела. Доказана однозначная разрешимость начально-краевых задач.

В разделе 2.1 рассматривается следующая модель

$$a \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (k(\theta) \nabla \theta) - \mu_a \varphi = u_1 \chi, \quad (1')$$

$$- \nabla \cdot (\alpha \nabla \varphi) + \mu_a \varphi = u_2 \chi, \quad r \in G, \quad 0 < t < T, \quad (2')$$

$$\alpha \partial_{\mathbf{n}} \varphi + 0.5 \varphi|_{\Gamma} = 0, \quad k \partial_{\mathbf{n}} \theta + \lambda(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad (3')$$

$$\theta(r, 0) = \theta_0. \quad (4')$$

Для задачи (1') – (4') доказана однозначная разрешимость. Здесь u_1 описывает мощность источника, идущую на излучение, u_2 описывает мощность источника, идущую на нагрев наконечника оптоволокну, χ — характеристическая функция части среды, в которой находится наконечника оптоволокну, разделенная на объем наконечника.

Разработан, обоснован и численно реализован итерационный алгоритм решения начально-краевой задачи для модели ВВЛА без учета излучения черного тела. На каждом шаге итерационного алгоритма решается линейная начально-краевая задача:

$$\begin{aligned} a \partial \theta^m / \partial t - \nabla \cdot (k(\theta^{m-1}) \nabla \theta^m) &= \mu_a \varphi + u_1 \chi, \\ k(\theta^{m-1}) \partial_{\mathbf{n}} \theta^m + \lambda(\theta^m - \theta_b) &= 0, \quad \theta^m|_{t=0} = \theta_0. \end{aligned} \quad (5)$$

где φ вычисляется как решение:

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla \varphi) + \mu_a \varphi = u_2 \chi,$$

θ^{m-1} , $m = 1, 2, \dots$ – температурное поле, полученное на предыдущей итерации.

Перенос тепла и излучения моделируется в среде, состоящей из четырех подобластей, включающих кровь, стенки вены, перивенозную ткань и оптоволокну. Схема расчетной области G с границей Γ в цилиндрической системе координат, при угловой симметрии, приведена на рисунке 1.

На рисунке 2 демонстрируется полученное температурное поле в фиксированные моменты времени 12.5 и 20 секунд с начала процедуры со следующим распределением мощности источника: $(u_1, u_2) = (3, 7)$ Вт.

Об эффективности лазерной абляции можно судить по поведению температурных профилей в различных точках расчетной области. На рисунке 3 демонстрируется поведение температурных профилей в трех точках наблюдения (1.5, 10), (2.5, 10) и (3.5, 10).

В разделе 2.2 рассматривается модель ВВЛА с учетом излучения черного тела (1) – (4). Для нее доказана однозначная разрешимость начально-краевой задачи.

Для модели ВВЛА (1) – (4) разработан, обоснован и численно реализован итерационный алгоритм нахождения решения начально-краевой задачи. Для каждого момента времени $t = t_l = l \Delta t$, $l = 1, 2, \dots, N$ используется итерационный алгоритм нахождения решения соответствующей краевой задачи. При этом, m -й шаг итерационной процедуры ($m = 1, 2, \dots, M$) записывается следующим образом

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla \varphi_m) + \beta(\varphi_m - |\theta_{m-1}^3| \theta_{m-1}) = g, \quad (6)$$

$$a \partial \theta_m / \partial t - \nabla \cdot (k(\theta_{m-1}) \nabla \theta_m) - b(|\theta_{m-1}^3| \theta_m - \varphi_m) = f, \quad x \in G, \quad (7)$$

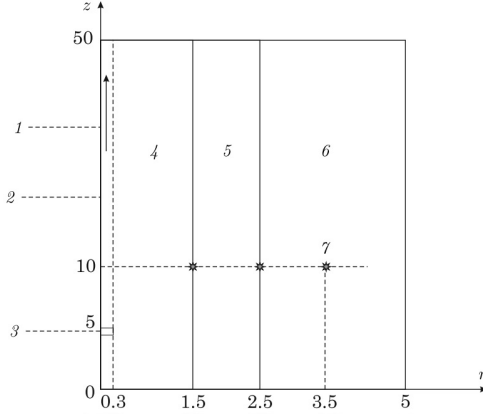


Рисунок 1 — Расчётная область в мм: 1 — направление движения, 2 — оптоволокну, 3 — карбонизированный слой, 4 — кровь, 5 — вена, 6 — перивенозная ткань, 7 — линия наблюдения

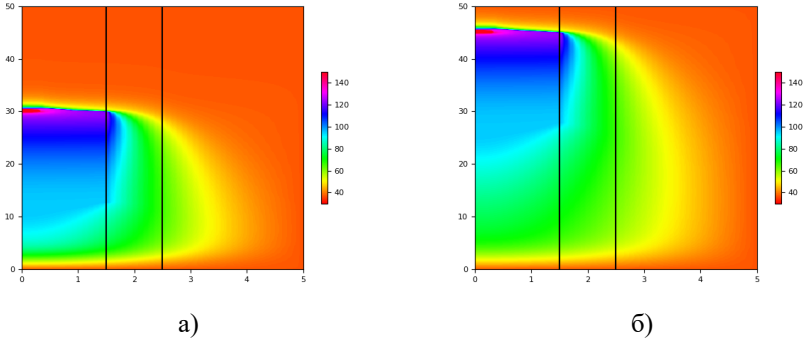


Рисунок 2 — Температурное поле в фиксированные моменты времени а) 12.5 и б) 20 секунд с начала процедуры

$$k(\theta_{m-1})\partial_n\theta_m + \lambda(\theta_m - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi_m + \gamma(\varphi_m - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad (8)$$

где производная по времени в (7) аппроксимируется следующим образом

$$\frac{\partial\theta_m}{\partial t} \simeq \frac{\theta_m|_{t=t_l} - \theta_M|_{t=t_{l-1}}}{\Delta t},$$

а функции θ_m , θ_{m-1} , φ_m в (6)–(8) являются приближениями решения, соответствующее моменту времени $t = t_l$. Для инициализации итерационной

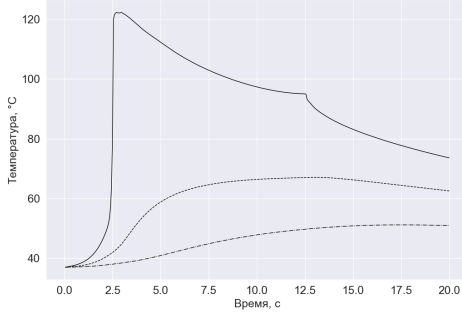


Рисунок 3 — Температурные профили в точках: (1.5, 10) — внутренняя стенка вены (сплошная линия); (2.5, 10) — внешняя стенка вены (штриховая линия); (3.5, 10) — перивенозная ткань (штрих-пунктирная линия).

процедуры задаем начальное приближение температуры для каждого момента времени:

$$\theta_0|_{t=t_l} = \theta_M|_{t=t_{l-1}}, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad \theta_M|_{t=t_0} = \theta_0.$$

В третьей главе исследуются обратные экстремальные задачи. Доказана разрешимость задачи оптимального управления для моделей ВВЛА. Разработаны итерационные алгоритмы поиска решений задач оптимального управления для моделей ВВЛА, доказана их сходимость. Проведена программная реализация алгоритмов, продемонстрированы результаты их работы.

Обратная экстремальная задача для квазилинейных уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена, описывающих процедуру ВВЛА в ограниченной области G с границей $\Gamma = \partial G$, состоит в минимизации целевого функционала

$$J(\theta, \varphi, u_1, u_2) \rightarrow \inf, \quad (9)$$

на решениях начально-краевой задачи для модели ВВЛА с учетом или без учета излучения черного тела. При этом учитываются следующие ограничения:

$$\{u_1, u_2\} \in U_{ad}, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_c, \quad (10)$$

то есть неизвестные управления u_1, u_2 принадлежат множеству допустимых управлений U_{ad} и температура в подобласти G_2 области G не может превышать критического значения θ_c .

В разделе 3.1 для модели (1') – (4') рассматривается следующая целевая функция

$$J_\varepsilon(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta) dx dt, \quad u \in U_{ad},$$

Здесь G_1 и G_2 заданные подобласти области G , θ удовлетворяет начально-краевой задаче (1') – (4').

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq \theta_c, \\ (\theta - \theta_c)^2, & \text{если } \theta > \theta_c. \end{cases}$$

На каждом шаге итерации алгоритма решается линейно-квадратичная задача оптимального управления, в которой требуется найти минимум функционала:

$$\widehat{J}_\varepsilon(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dxdt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_*} (\theta - \theta_c)^2 dxdt \rightarrow \inf, \quad u \in U_{ad}, \quad (11)$$

с ограничениями (1') – (4'). Здесь $G_* = \{x \in G_2 : \widehat{\theta}(x, t) > \theta_c\}$. Функция $\widehat{\theta}$ описывает температурное поле, найденное на предыдущей итерации.

Задача (11), с ограничениями (1') – (4') сводится к нахождению минимума квадратичной функции относительно параметров u_1 и u_2 :

$$\widehat{J}_\varepsilon(u_1\Theta_1 + u_2\Theta_2 + \Theta_3) \rightarrow \inf$$

в треугольнике $\{u_1, u_2 \in \mathbb{R} : u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}$. Функции Θ_1 , Θ_2 и Θ_3 вычисляются заранее как решения следующих линейных начально-краевых задач для $x \in G, t \in (0, T)$:

$$\begin{aligned} a\partial\Theta_1/\partial t - \nabla \cdot (k(\widehat{\theta})\nabla\Theta_1) &= \chi, \quad \Theta_1|_\Gamma = 0, \quad \Theta_1(x, 0) = 0; \\ a\partial\Theta_2/\partial t - \nabla \cdot (k(\widehat{\theta})\nabla\Theta_2) &= \beta\varphi, \quad \Theta_2|_\Gamma = 0, \quad \Theta_2(x, 0) = 0; \\ a\partial\Theta_3/\partial t - \nabla \cdot (k(\widehat{\theta})\nabla\Theta_3) &= 0, \quad \Theta_3|_\Gamma = 0, \quad \Theta_3(x, 0) = \theta_0. \end{aligned}$$

где φ вычисляется как решение:

$$-\nabla \cdot (\alpha\nabla\varphi) + \mu_a\varphi = u_2\chi,$$

Аппроксимации решения в точке (1.5, 10) по результатам трех итераций алгоритма показаны на рисунке 4.

В разделе 3.2 для модели ВВЛА (1)–(4), учитывающей излучение черного тела, рассматривается целевая функция со штрафом:

$$J_\varepsilon(\theta, \varphi, u) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dxdt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_2} f(\theta) dxdt, \quad u \in U_{ad}.$$

Здесь,

$$f(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq \theta_c; \\ (\theta - \theta_c)^2, & \text{если } \theta > \theta_c. \end{cases}$$

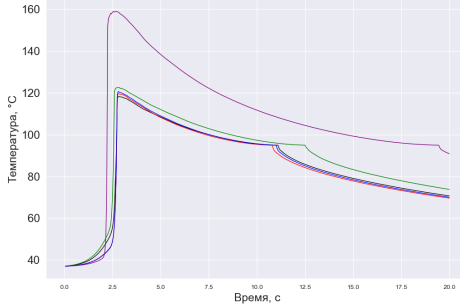


Рисунок 4 — Температурные профили в точке (1.5, 10): искомая температура (черный), начальное приближение (фиолетовый), аппроксимация решения на 1-м шаге (зеленый), аппроксимация решения на 2-м шаге (синий), аппроксимация решения на 3-м шаге (красный).

То есть, на множестве G_1 требуется приблизить распределение температуры θ к заданному распределению θ_d , а на множестве G_2 максимальное распределение температуры не может превосходить некоторого заданного критического значения θ_c .

На каждом шаге итерационного алгоритма находится минимум следующего линейно-квадратичного функционала:

$$\widehat{J}_\varepsilon(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dxdt + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\widehat{\theta} > \theta_c} (\theta - \theta_c)^2 dxdt \rightarrow \inf, \quad u \in U_{ad}, \quad (12)$$

с ограничениями

$$\begin{aligned} a\partial\theta/\partial t - \nabla \cdot (k(\widehat{\theta})\nabla\theta) + b(|\widehat{\theta}|^3\theta - \varphi) &= C_\theta u_1, \\ -\nabla \cdot (\alpha\nabla\varphi) + \beta(\varphi - |\widehat{\theta}|^3\widehat{\theta}) &= C_\varphi u_2, \end{aligned} \quad (13)$$

$$k(\widehat{\theta})\partial_n\theta + \lambda(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + 0.5\varphi|_\Gamma = 0 \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (14)$$

Здесь $C_\theta = \chi/T_c$, $C_\varphi = \chi/(4\sigma n^2 T_c^4)$. Функция $\widehat{\theta}$ описывает температурное поле, найденное на предыдущей итерации.

Задача (12)–(14) сводится к нахождению минимума квадратичной функции по параметрам u_1 и u_2 :

$$\widehat{J}_\varepsilon(u_1\Theta_1 + u_2\Theta_2 + \Theta_3) \rightarrow \inf$$

в треугольнике $\{u_1, u_2 \in \mathbb{R} : u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}$. Функции Θ_1 , Θ_2 и Θ_3 вычисляются как решения следующих линейных начально-краевых задач для

$x \in G, 0 < t < T:$

$$\begin{aligned}
 a\partial\Theta_1/\partial t - \nabla \cdot (k(\hat{\theta})\nabla\Theta_1) + b|\hat{\theta}|^3\Theta_1 &= C_\theta, \\
 k(\hat{\theta})\partial_n\Theta_1 + \lambda\Theta_1|_\Gamma &= 0, \quad \Theta_1|_{t=0} = 0; \\
 a\partial\Theta_2/\partial t - \nabla \cdot (k(\hat{\theta})\nabla\Theta_2) + b|\hat{\theta}|^3\Theta_2 &= b\varphi_2, \\
 k(\hat{\theta})\partial_n\Theta_2 + \lambda\Theta_2|_\Gamma &= 0, \quad \Theta_2|_{t=0} = 0; \\
 a\partial\Theta_3/\partial t - \nabla \cdot (k(\hat{\theta})\nabla\Theta_3) + b|\hat{\theta}|^3\Theta_3 &= b\varphi_3, \\
 k(\hat{\theta})\partial_n\Theta_3 + \lambda\Theta_3|_\Gamma &= \lambda\theta_b, \quad \Theta_3|_{t=0} = \theta_0.
 \end{aligned}$$

Здесь φ_2, φ_3 — решения следующих линейных краевых задач:

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot (\alpha\nabla\varphi_2) + \beta\varphi_2 &= C_\varphi, \quad \alpha\partial_n\varphi_2 + 0.5\varphi_2|_\Gamma = 0, \\
 -\nabla \cdot (\alpha\nabla\varphi_3) + \beta\varphi_3 &= \beta\hat{\theta}^4, \quad \alpha\partial_n\varphi_3 + 0.5\varphi_3|_\Gamma = 0.
 \end{aligned}$$

В качестве областей G_1 и G_2 взяты малые окрестности точек (1.5, 10) и (3.5, 10), соответственно. Распределение температуры θ_d , к которому мы приближаем решение задачи в точке (1.5, 10) соответствует температурному профилю при $(u_1, u_2) = (3, 7)$ Вт. В результате выполнения алгоритма получены следующие первые три пары (u_1, u_2) управления: (2.73, 10.74), (3.11, 7.23), (3.44, 5.55) Максимальное значение температуры в контрольной точке (3, 5, 10) на третьей итерации составило 50,3° С. Отметим, что при $(u_1, u_2) = (3, 7)$ максимальное значение температуры в точке (3, 5, 10) равно 50,4° С.

Четвертая глава посвящена описанию программных модулей и обсуждению результатов вычислительных экспериментов.. В разделе 4.1 содержится описание программного обеспечения, общая схема предствалена на рисунке 5. Программное обеспечение делится на три модуля. Первый модуль предназначен для нахождения решения начально-краевой задачи для квазилинейной модели ВВЛА, учитывающей излучение черного тела. Для нахождения решения начально-краевой задачи используется итерационный алгоритм. Нахождение приближения решения на каждом шаге итерационного алгоритма осуществляется с помощью метода конечных элементов с использованием пакета FreeFEM++. Программа позволяет найти распределение температуры и интенсивности излучения внутри вены и в окружающей ткани. В интерфейсе программы можно выбрать мощность источника излучения, распределение мощностей, идущих на нагрев наконечника оптоволокну и на излучение, и длины волны лазерного излучения. Второй модуль программного обеспечения позволяет найти приближение решения задачи оптимального управления для квазилинейной модели внутривенной лазерной абляции. Программа подбирает характеристики излучения, обеспечивающие приближение температурного профиля в точке наблюдения к заданному, при этом в некоторой контрольной точке температура

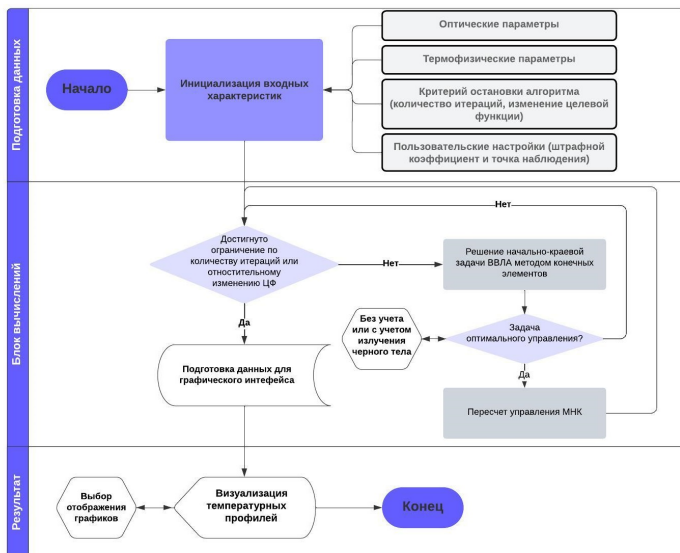


Рисунок 5 — Общая схема структуры программного комплекса

не должна превышать выбранного критического значения. Модуль реализует итерационный алгоритм из раздела 3.1. Интерфейсе программы позволяет задать мощность, идущую на нагрев наконечника и на излучение, ограничение по количеству итераций для поиска решения, выбрать точку наблюдения и установить ограничение по температуре, изменить скорость вытягивания оптоволокна и установить величину штрафного коэффициента. В результате работы программа выводит температурный профиль в заданных точках вычислительной области. Третий модуль соответствует итерационному алгоритму из раздела 3.2. Модель ВВЛА учитывает влияние внутреннего теплового излучения (излучения черного тела). Аналогично второму модулю программа подбирает характеристики излучения, обеспечивающие приближение температурного профиля в точке наблюдения к заданному, при этом в некоторой контрольной точке температура не должна превышать выбранного критического значения. В интерфейсе программы задается критерий останова алгоритма в виде ограничения на относительное изменение целевого функционала.

В разделе 4.2 поведение температурных профилей в точках наблюдения при длинах волн лазерного излучения 810 нм получилось близким с моделью, рассмотренной Poluektova A. A., Malskat W. S. J., van Ruijven P. W. M (см. рисунок 6).

Было проведено сравнение моделей ВВЛА с учетом и без учета излучения черного тела для длин 810 и 1064 нм. В результате отмечено небольшое отклонение температурных профилей, максимальное относительное отклонение

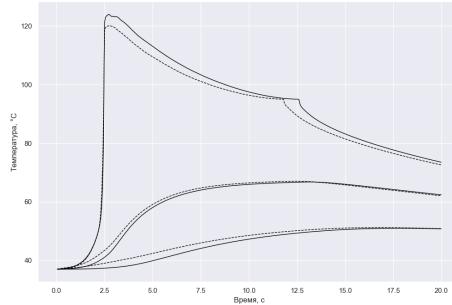


Рисунок 6 — Температурные профили для длины волны 810 нм в точках (1.5, 10), (2.5, 10) и (3.5, 10): сплошные линии — модель (1–4); штриховые линии — модель, рассмотренная Poluektova A. A., Malskat W. S. J., van Ruijven P. W. M

составило 6.8%. Несмотря на то, что мнение о незначительном влиянии излучения черного тела на температурные профили при моделировании процедуры ВВЛА высказывались и ранее (Poluektova A. A., Malskat W. S. J., van Ruijven P. W. M), но количественная оценка возникающей при этом погрешности проведена только в настоящей диссертационной работе.

В следующей серии экспериментов было рассмотрено влияние длины волны на температурный профиль. Выбор длины волны излучения существенно влияет на поведение температурного профиля. Подбирая мощность источника излучения (без изменения распределения мощности на нагрев оптоволокна и на излучение) можно приблизить температурный профиль к заданному профилю. Аналогично выбор черноты наконечника существенно влияет на поведение температурного профиля. Отмечено, что увеличение мощности, идущей на нагрев оптоволокна, приводит к увеличению уровней температуры.

Также была проведена оценка влияния штрафного коэффициента ϵ на сходимость итерационного алгоритма. Результаты для излучения длины волны 810 нм приведены в таблице 1. Отметим, что для длины 810 нм с уменьшением штрафного коэффициента норма отклонения также уменьшается, что согласуется с теоретическим результатом.

В приложении представлены три свидетельства о регистрации программ для ЭВМ, интерфейсы программ и аннотации.

Таблица 1 — Результаты для длины волны 810 нм

Штрафной коэффициент ε	0.1	0.3	0.5	0.7
Начальное управление	(7, 3)	(7, 3)	(7, 3)	(7, 3)
Управление после 3 итераций	(3.5, 4.03)	(2.25, 8.13)	(1.46, 10.56)	(1.3, 11.09)
Максимальная температура в (3.5, 10)	49.88	50.52	50.80	50.90
Норма отклонения в (1.5, 10)	6522	14038	17401	18540

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. осуществлена разработка и обоснована сходимость итерационных алгоритмов решения начально-краевых задач, включающая в себя доказательство однозначной разрешимости начально-краевых задач и доказательство сходимости итерационного процесса поиска решения;
2. осуществлена разработка и обоснована сходимость итерационных алгоритмов решения задач оптимального управления для моделей ВВЛА, включающая в себя доказательство разрешимости задач оптимального управления и доказательство сходимости итерационного процесса поиска решения;
3. осуществлена программная реализация разработанных алгоритмов решения начально-краевых и обратных экстремальных задач для моделей ВВЛА;
4. проведена серия вычислительных экспериментов по исследованию влияния мощности источника излучения, длины волны лазерного излучения, черноты наконечника и излучения черного тела на характеристики процедуры ВВЛА.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях из списка ВАК РФ

1. Penalty method to solve an optimal control problem for a quasilinear parabolic equation / A. Y. Chebotarev [et al.] // Far Eastern Mathematical Journal. — 2022. — Vol. 22, no. 2. — P. 158—163.
2. Пак, Н. М. Итерационный алгоритм решения начально-краевой задачи для квазилинейной модели сложного теплообмена / Н. М. Пак, А. Е. Ковганюк // Дальневосточный математический журнал. — 2023. — Т. 23, № 2. — С. 240—245.

3. *Чеботарев, А. Ю.* Анализ и численное моделирование начально-краевой задачи для квазилинейных уравнений сложного теплообмена / А. Ю. Чеботарев, Н. М. Пак, А. Е. Ковтанюк // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2023. — Т. 26, № 4. — С. 180—193.

В изданиях, входящих в международную базу цитирования Scopus

4. Mathematical and computer modeling of endovenous laser treatment / A. E. Kovtanyuk [et al.] // CEUR Workshop Proceedings. Vol. 2837. — 2021. — P. 13—23.
5. Optimal control with phase constraints for a quasilinear endovenous laser ablation model / A. Chebotarev [et al.] // 2021 Days on Diffraction (DD). — 2021. — Vol. 2837. — P. 19—24.
6. *Park, N.* Boundary optimal control of radiative-conductive heat transfer with reflection and refraction effects / N. Park, A. Chebotarev, A. Kovtanyuk // 2022 Days on Diffraction (DD). — 2022. — P. 106—110.
7. *Park, N.* Inverse extremum problem with phase constraints for a quasi-linear complex heat transfer model / N. Park, A. Kovtanyuk, A. Chebotarev // 2023 Days on Diffraction (DD). — 2023. — June. — P. 168—173.
8. Mathematical modeling of complex heat transfer in the context of the endovenous laser ablation / A. Y. Chebotarev [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. — 2023. — Vol. 2514. — P. 012006.

Зарегистрированные программы для ЭВМ

9. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Нахождение решения начально-краевой задачи для модели внутривенной лазерной абляции / Н. М. Пак, А. Е. Ковтанюк ; АМГУ. — № 2023683111 ; заявл. 27.10.2023 ; опубл. 02.11.2023, 2023683111 (Рос. Федерация).
10. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Решение задачи оптимального управления для модели внутривенной лазерной абляции при фазовом ограничении / Н. М. Пак, А. Е. Ковтанюк ; АМГУ. — № 2024615240 ; заявл. 29.02.2024 ; опубл. 05.03.2024, 2024615240 (Рос. Федерация).
11. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Решение обратной экстремальной задачи для нелинейной модели сложного теплообмена / Н. М. Пак, А. Е. Ковтанюк ; АМГУ. — № 2024615421 ; заявл. 29.02.2024 ; опубл. 06.03.2024, 2024615421 (Рос. Федерация).

В сборниках трудов конференций

12. *Пак, Н. М.* Моделирование температурных полей при внутривенной лазерной абляции для излучения на различных длинах волн / Н. М. Пак // Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам. — 2021. — С. 253—254.

13. *Пак, Н. М.* Модель радиационно-кондуктивного теплообмена с движущимся источником / Н. М. Пак // *Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам.* — 2022. — С. 213—214.
14. *Degtyareva, A.* Optimization of the endovenous laser ablation model / A. Degtyareva, N. Park // *The 8th Annual Student Scientific Conference in English.* — 2021. — P. 134—135.
15. *Chebotarev, A. Y.* Boundary optimal control of radiative-conductive heat transfer with reflection and refraction effects / A. Y. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk, N. M. Park // *International conference Days on Diffraction 2022 Abstracts.* — 2022. — P. 16—17.
16. *Kovtanyuk, A. E.* Inverse extremum problem with phase constraints for a quasi-linear complex heat transfer model / A. E. Kovtanyuk, N. M. Park // *International conference Days on Diffraction 2023 Abstracts.* — 2023. — P. 44.
17. *Вычислительные технологии и прикладная математика* // *Материалы II Международного семинара (12–16 июня 2023 г., Благовещенск)* / под ред. А. Г. Масловская. — Благовещенск : Изд.-во Амурского гос. университета, 2023. — С. 158—160.

Пак Николай Михайлович

Математические модели и вычислительные алгоритмы для оценки характеристик
процедуры лазерной абляции

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____.____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____

