



**ВТОРАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
БЛАГОВЕЩЕНСК – РОССИЯ, 19 марта 2022**

Задание 1 (9 баллов)

Определить количество нулей функции

$$f(x) = 2e^{2-x^2}(x^6 - 3x^4 + 5x^2 - 1) - 2e - 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Задание 2 (12 баллов)

Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} (A^n - E) \right),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 3 (10 баллов)

Дана функция

$$f(x) = \frac{a^{2x}}{a^{2x} + a}, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найти сумму

$$f(0) + f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2}{2022}\right) + f\left(\frac{3}{2022}\right) + \dots + f\left(\frac{2021}{2022}\right) + f\left(\frac{2022}{2022}\right).$$

Задание 4 (9 баллов)

Построить линию, заданную комплексным уравнением (t – действительный параметр):

$$z \cdot (1 + e^{-it})^2 = 1.$$

Задание 5 (9 баллов)

Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

Задание 6 (8 баллов)

Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Задание 7 (12 баллов)

Найти объем m -мерной пирамиды T_m :

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq h.$$

Задание 8 (12 баллов)

Найти действительные решения дифференциального уравнения

$$(y')^3 + \frac{2y'}{x^2} = 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{6y}{x} + \frac{12y^2}{x^2} + \frac{8y^3}{x^3} + \frac{4y}{x^3}.$$

Задание 9 (9 баллов)

Дано линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n с постоянными действительными коэффициентами. Известно, что $x^{50} \sin^4(3x)$ – одно из решений этого уравнения. Найдите минимально возможное значение n .

Задание 10 (10 баллов)

Игроки A и B играют шахматный матч между собой. Игрок A выигрывает у игрока B партию с вероятностью $0,6$. Для уравнивания шансов они договорились, что A побеждает, если выигрывает три партии, а B побеждает, если выигрывает две партии (ничьи не учитываются). Какова вероятность выигрыша каждого из игроков в матче?