



**ТРЕТЬЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА  
БЛАГОВЕЩЕНСК – РОССИЯ, 25 марта 2023**

**Задание 1 (8 баллов)**

Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$$

**Задание 2 (10 баллов)**

К графику функции  $y = -(x^2/12) + x - 16/3$  проведена касательная, пересекающая график функции  $y = 3|x + 6| - 7/3$  в точках  $A$  и  $B$ . Найти радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках  $A$ ,  $B$  и  $C(-6; -7/3)$ , если  $\angle CAB = 2\arccos(3/\sqrt{10}) + \angle CBA$ .

**Задание 3 (9 баллов)**

Матрицы  $A_{3 \times 2}$  и  $B_{2 \times 3}$  таковы, что

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу  $BA$ .

**Задание 4 (11 баллов)**

Найти общее решение или общий интеграл уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{y^3 + x^2y + x^2}.$$

**Задание 5 (10 баллов)**

Найти предел суммы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$$

**Задание 6 (11 баллов)**

Последовательность  $\{u_n\}$  задана рекуррентно:

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 4, \quad u_{n+1} = u_{n-2} + 2u_{n-1} + u_n, \quad n \geq 2.$$

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{10^n}.$$

**Задание 7 (9 баллов)**

Четыре участника по очереди бросают монету, на которой каждый раз с одинаковой вероятностью 0,5 выпадает «орел» или «решка». Выигрывает тот участник, у которого впервые выпадает «орел». Определить вероятность выигрыша каждого из участников.

**Задание 8 (13 баллов)**

Вычислить определенный интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos^2 x)^2} \quad (a > 0, b > 0).$$

**Задание 9 (10 баллов)**

Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} - 2x - \ddot{y} + 4\dot{y} = 0, \\ 2\dot{x} + x - \dot{y} - 4\dot{y} + 2y = 0. \end{cases}$$

**Задание 10 (9 баллов)**

Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_{\Gamma} \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}, \quad \Gamma = \{(x, y): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\}.$$